Introduzione all'Algebra Lineare

R. Baietta

Aprile 2007

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questo libro si rivolge a tutti gli studenti delle scuole superiori, e vuole essere una guida all'apprendimento dell'Algebra Lineare.

Questo libro è nato dagli appunti di algebra lineare presi al corso universitario di Geometria I del Politecnico di Milano.

Questo libro viene distribuito con una licenza "Creative Commons", riportata in appendice, che si applica sia al file sorgente del libro, sia al relativo file compilato (dvi, PostScript, PDF, ...).

Parte I

Introduzione all'Algebra Lineare

Capitolo 2

Le matrici

Una matrice di tipo (m, n), con $m \geq 1$ e $n \geq 1$ è una tabella di $m \times n$ numeri anche complessi, ordinati su m righe e n colonne.

Per esempio, una matrice $A_{(2,3)}$ può essere rappresentata cosí:

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Se $m = n$ la relativa matrice $A_{(m,m)}$ si dice matrice quadrata di ordine m. Quando non è quadrata, la matrice è rettangolare.

Se $m = 1$ ho un vettore riga. Se $n = 1$ ho un vettore colonna.

Definizione 1 *Data una matrice A, si definisce come trasposta di A, e la si indica con A_T, la matrice ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.*

$$(A_{(2,3)})_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Definizione 2 *Data una matrice A, si definisce come opposta di A la matrice ottenuta da A invertendo i segni dei numeri che la compongono.*

$O_{(m,n)}$ indica la matrice zero, ovvero la matrice i cui numeri sono uguali a 0.

Per individuare univocamente e facilmente i numeri componenti una matrice, si adotta la notazione a doppio indice:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{(m,n)}$ viene abbreviata in $[a_{ik}]$, in cui $(i = 1, 2, \ldots m; k = 1, 2, \ldots n)$. Ridefinendo quanto prima esposto, possiamo dire che

$$\begin{aligned} A &= [a_{ik}] \\ A_T &= [b_{ik} = a_{ki}] \\ -A &= [-a_{ik}] \end{aligned}$$

2.1 Particolari tipi di matrici quadrate

Nelle matrici quadrate, gli elementi a_{ik} dove $i = k$, si chiamano *elementi principali*, e individuano la *diagonale principale*.

Definizione 3 *Si definisce* traccia della matrice *la somma degli elementi principali, ovvero* $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Definizione 4 *Una matrice quadrata si dice* simmetrica *quando rimane inalterata scambiando le righe con le colonne, ovvero se coincide con la sua trasposta:* $A = A_T$*, ovvero* $[a_{ik}] = [a_{ki}]$.

Una matrice *diagonale* è un particolare tipo di matrice simmetrica, in cui tutti gli elementi non principali sono pari a 0: $\forall i \neq k,\ a_{i,k} = 0$.

Una matrice diagonale si rappresenta spesso cosí:

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

In una matrice diagonale, quando $a_1 = a_2 = \ldots a_n$, abbiamo una *matrice scalare*. Una particolare matrice scalare è la *matrice unità*, indicata con I, in cui $\forall i,\ a_i = 1$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Operazioni sulle matrici

2.2.1 Somma di matrici

Due matrici possono essere sommate solo se hanno le stesse dimensioni. La matrice risultante ha come elementi la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici. Piú precisamente, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ allora

$$A + B = C = [c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}]$$

La somma delle matrici gode delle seguenti proprietà:

- proprietà associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- proprietà commutativa: A + B = B + A
- la matrice O, sommata ad una qualsiasi altra matrice A dello stessa dimensione, restituisce A stessa.
- esiste sempre la matrice opposta di A definita come quella matrice che sommata ad A restituisce la matrice O.
- la trasposta della matrice somma è pari alla somma delle matrici trasposte, ovvero $(A + B)_T = A_T + B_T$

2.2.2 Prodotto di un numero per una matrice

Dato un numero h e una matrice $A = [a_{ij}]$, si definisce come prodotto di h e A la matrice i cui elementi sono ottenuti moltiplicando il numero h per il corrispondente elemento di A, ovvero:

$$hA = B = [b_{ij} = h\, a_{ij}]$$

Alcune proprietà del prodotto tra un numero e una matrice sono le seguenti:

- $0\,A = O$, ove O è la matrice zero.
- proprietà distributiva: $(h+j)A = h\,A + j\,A$, e ancora $h(A+B) = h\,A + h\,B$
- proprietà associativa: $(hj)A = h(jA) = j(hA) = jhA$
- $1A = A$
- $h\,I$ è la matrice diagonale scalare
- $(hA)_T = h(A_T)$
- se $h = 0$ o $A = O$ allora $hA = O$

2.2.3 Combinazione lineare

Definizione 5 *Dato un insieme ordinato di r matrici $A_1, A_2, \dots A_r$, tutte di dimensione (m, n), e dato un insieme ordinato di r numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$, si definisce una* combinazione lineare *delle matrici A_i con i coefficienti α_i, la seguente operazione:*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots \alpha_r A_r$$

Definizione 6 *Si dice che r matrici A_i sono* linearmente dipendenti *se esiste almeno una loro combinazione lineare pari a O con coefficienti non tutti nulli.*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots \alpha_r A_r = O$$

Definizione 7 *Si dice che r matrici A_i sono* linearmente indipendenti *quando l'unica combinazione lineare pari a O prevede i coefficienti tutti pari a 0.*

Teorema 1 *Una combinazione lineare di matrici simmetriche è a sua volta una matrice simmetrica.*

Si può facilmente dimostrare: infatti, se S_i, $i = 1, 2, \dots r$ sono simmetriche, la loro combinazione lineare $F = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \cdots \alpha_r S_r$ è tale per cui $f_{ik} = \alpha_1 (s_1)_{ik} + \alpha_2 (s_2)_{ik} + \cdots \alpha_r (s_r)_{ik}$. Dalla definizione è chiaro che $\forall j = 1, 2, \dots r\ (s_j)_{ik} = (s_j)_{ki}$, da cui si ottiene evidentemente che $f_{ik} = f_{ki}$, da cui la tesi.

Il prossimo teorema viene descritto in termini di un legame tra due espressioni, relative a matrici, ottenibili come conseguenza l'una dell'altra, in maniera intercambiabile. Questo tipo di teoremi si dice che esprimono "condizione necessaria e sufficiente", e possono anche essere definiti con la dicitura "se e solo se". In termini logici, se E e F sono due espressioni logiche, $\Leftarrow$ l'operatore di implicazione e $\bigwedge$ l'operatore di "and" logico, il teorema "se e solo se" viene indicato come $E \Leftarrow F \bigwedge F \Leftarrow E$, o anche $E \Leftrightarrow F$

Teorema 2 *r matrici, con $r > 1$, sono linearmente dipendenti se e solo se almeno una di esse è combinazione lineare delle altre.*

Le due espressioni qui coinvolte sono "r matrici sono linearmente dipendenti" e "una tra r matrici è combinazione lineare delle altre". La dimostrazione si articola nel verificare che da una si deduce l'altra, e viceversa.

Siano $A_1, A_2, \dots A_r$ le matrici citate dal teorema. Sia $A_i = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \dots \beta_{r-1} A_{r-1}$ la matrice che è la combinazione lineare delle altre, ovvero piú precisamente

$$A_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_j A_j \ , \ j \neq i$$

Verifichamo che sono linearmente dipendenti. Se sommiamo $-A_i$ ad entrambi i membri dell'uguaglianza, otteniamo

$$-A_i + A_i = O = -A_i \sum_{j=1}^{r} \beta_j A_j \ , \ j \neq i$$

Ecco la prima parte della tesi: le matrici sono linearmente dipendenti, in quanto esiste sicuramente una combinazione delle stesse che dà la matrice nulla O in cui i coefficienti non sono tutti 0, e lo è quello di A_i essendo il coefficiente pari a -1.

Dimostriamo adesso la seconda parte del teorema, ovvero abbiamo r matrici linearmente dipendendi C_i, e dimostriamo che una di esse è combinazione lineare delle altre. Dall'ipotesi, possiamo dire che esiste un insieme di r coefficienti γ_i non tutti nulli tali per cui

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i C_i = O$$

Se j è l'indice del coefficiente non nullo, moltiplicando entrambi i membri dell'uguaglianza per $1/\gamma_j$ otteniamo

$$C_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{r} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} C_i = O$$

Sommando opportunamente gli opposti delle matrici ad entrambi i membri dell'uguaglianza, otteniamo la tesi, ovvero che una è la combinazione lineare delle altre.

$$C_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{r} -\frac{\gamma_i}{\gamma_j} C_i$$

2.2.4 Prodotto di matrici

Per poter eseguire il prodotto tra due matrici, l'una deve essere *conformabile* con l'altra, ovvero il numero di righe della seconda deve essere pari al numero di colonne della prima. Se $A_{(m,p)}$ allora $B_{(p,n)}$ è conformabile con A.

La matrice prodotto $A_{(m,p)} B_{(p,n)} = C_{(m,n)}$ è tale per cui ciascun elemento c_{ik} è pari alla somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di A per gli elementi della k-esima colonna di B.

$$AB = C = \left[c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} \right]$$

Un esempio:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & \cdots \\ u & v & w & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv & az+bw & \cdots \\ cx+du & cy+dv & cz+dw & \cdots \\ ex+fu & ey+fv & ez+fw & \cdots \end{bmatrix}$$

Definizione 8 *Due matrici quadrate A e B si dicono* permutabili *quando $AB = BA$.*

Alcuni commenti ed osservazioni:

- il prodotto di matrici gode della proprietà associativa. Si può facilmente verificare che $(AB)C = A(BC)$, ed essendo quindi le parentesi superflue, il prodotto tra le tre matrici lo indicheremo con ABC;
- il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa; si nota anzi che due matrici che sono conformabili in un ordine, non lo sono a priori nell'altro;
- il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa nemmeno se le matrici sono quadrate. Es:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Invertendo l'ordine:

  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- proprio l'esempio sopra ci porta a dire che con le matrici non vale la regola dell'annullamento del prodotto, ovvero se il risultato di una moltiplicazione tra matrici porta alla matrice O, non necessariamente una delle due matrici fattori è O.
- vale invece la proprietà distributiva. Si vebe facilmente infatti che

  $$(A+B)C = AC + BC$$
  $$C(A+B) = CA + CB$$

- la matrice unità I si comporta esattamente come ci si aspetta.

  $$IA = A$$

- si può vedere che la trasposizione del prodotto è pari al prodotto delle trasposizioni nell'ordine opposto

  $$(AB)_T = B_T A_T$$

- un numero (uno scalare) in un prodotto di matrici può essere moltiplicato per qualsiasi matrice del prodotto:

  $$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Definizione 9 *Due matrici A e B si dicono permutabili se $AB = BA$*

2.2.5 Potenze di matrici quadrate

Una matrice può essere moltiplicata con sé stessa solo quando la matrice è ovviamente quadrata.

Definizione 10 *Data una matrice quadrata A, si definisce A^n quella matrice ottenuta moltiplicando n volte la matrice quadrata A con sè stessa.*

$$A^n = \prod_{j=1}^{n} A$$

In questa definizione è evidente che $n \geq 0$.

Alcune proprietà della potenza di matrici sono le seguenti:

$$A^h A^k = A^{h+k}$$

$$A^{h^k} = A^{hk}$$

In generale sulla potenza di un prodotto di matrici $(AB)^m$ non possiamo dire nulla. Qualora però A e B fossero permutabili, allora $(AB)^m = A^m B^m$:

$$AB = BA \Rightarrow (AB)^m = A^m B^m$$

2.2.6 Polinomi matriciali

Definizione 11 *Sia A una matrice quadrata. Dato un polinomio $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, di definisce* polinomio nella matrice A associato al polinomio $f(x)$, *o anche* valore di $f(x)$ per $x = A$, *la seguente espressione:*

$$f(A) = a_0 I + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

Per ogni identità polinomiale si può dedurre la corrispondente identità matriciale. Ad esempio, data la seguente identità

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

possiamo dire che

$$(A+I)(A-I) = A^2 - I$$

Definizione 12 *Si dice che A, matrice quadrata, è emisimmetrica quando coincide con la opposta della sua trasposta, ovvero*

$$A = -A_T$$

Si può facilmente verificare che gli elementi principali sono tutti pari a 0, mentre tutti gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale, sono uguali ma di segno opposto ($a_{ik} = -a_{ki}$). L'unica matrice che è contemporaneamente simmetrica ed emisimmetrica, è la matrice nulla O.

Teorema 3 *Una combinazione lineare di matrici emisimmetriche è una matrice emisimmetrica.*

Definizione 13 *Si dice che A, matrice quadrata, è triangolare inferiore, quando tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono uguali a* 0.

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Definizione 14 *Si dice che A, matrice quadrata, è triangolare superiore, quando tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono uguali a* 0*.*

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Teorema 4 *Una qualunque matrice quadrata A può essere ottenuta dalla somma di una matrice simmetrica con una matrice emisimmetrica, e questa coppia di matrici è unica.*

Per dimostrare il teorema, mostreremo la maniera di ottenere due matrici, una simmetrica e l'altra emisimmetrica, che sommate danno la matrice A. La loro unicità verrà mostrata con una dimostrazione "per assurdo".

Prendiamo la matrice $\frac{1}{2}(A+A_T)$: essa è simmetrica perché $(\frac{1}{2}(A+A_T))_T = \frac{1}{2}(A+A_T)_T = \frac{1}{2}(A_T+(A_T)_T) = \frac{1}{2}(A_T+A)$

Prendiamo la matrice $\frac{1}{2}(A-A_T)$: essa è emisimmetrica perché $-(\frac{1}{2}(A-A_T))_T = -\frac{1}{2}(A-A_T)_T = -\frac{1}{2}(A_T-(A_T)_T) = -\frac{1}{2}(A_T-A) = \frac{1}{2}(A-A_T)$

Sommiamo le due matrici sopra presentate, e otteniamo la matrice A:

$$\frac{1}{2}(A+A_T)+\frac{1}{2}(A-A_T) = \frac{1}{2}(2A+A_T-A_T) = A$$

Rimane da dimostrare che la coppia è unica. Se per ipotesi non lo fosse, allora A potrebbe essere espressa come la somma di due coppie di matrici simmetriche ed emisimmetriche: $A = S+E$ e $A = S'+E'$. Ma allora $S+E = S'+E'$, da cui $S-S' = E'-E$. Per il teorema 1 (pag. 11), essendo $S-S'$ una combinazione lineare di due matrici simmetriche, $E'-E$ risulterebbe essere una matrice simmetrica. Ma la matrice $E'-E$ è una combinazione lineare di matrici emisimmetriche. Poiché non è possibile che una matrice sia contemporaneamente simmtrica ed emisimmetrica, a meno che non sia la matrice O, allora l'ipotesi non è valia, come volevasi dimostrare. Si può anche dire che, essendo O l'unica matrice contemporaneamente simmetrica ed emisimmetrica, allora $E' = E$ e $S' = S$, come volevasi dimostrare.

2.3 Un po' di calcolo combinatorio

Vogliamo arrivare alle equazioni matriciali. Per quel che riguarda le operazioni di somma e sottrazione, abbiamo visto che possiamo agire come con i numeri. Per esempio, se A e B sono due matrici note, e X è una matrice non nota

$$A+X = B \Rightarrow A+X-A = B-A \Rightarrow X = B-A$$

Con la moltiplicazione abbiamo invece al momento qualche difficoltà. Dobbiamo introdurre il concetto di *matrice inversa*, partendo da qualche nozione di *calcolo combinatorio.*

Definizione 15 *Si definisce una permutazione di n numeri,*$a_1, a_2, \dots a_n$*, un qualsiasi allineamento degli stessi.*

Per esempio, le permutazioni possibili dei numeri dell'insieme $A = \{a, b, c\}$ sono le seguenti

$$\begin{cases} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{cases}$$

Si verifica facilmente che il numero di permutazioni di n numeri è $n!$ (si legge *enne fattoriale*), dove

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\dots 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(n-j)$$

Tra tutte le permutazioni possibili di n numeri, si individua una permutazione di riferimento chiamata *permutazione fondamentale*, che per convenzione è quella con gli indici ordinati, ovvero

$$F = a_1, a_2, \dots a_n$$

Confrontando una qualsiasi permutazione P rispetto alla permutazione fondamentale F, la coppia di numeri a_i e a_j forma una *inversione* quando i due numeri si succedono in P in ordine opposto rispetto a F.

Per esempio, confrontando

$$\begin{cases} F = 1, 2, 3, 4, 5 \\ P = 2, 4, 5, 3, 1 \end{cases}$$

si vede che tra l'una e l'altra ci sono 6 inversioni.

Definizione 16 *Data una permutazione P e la sua permutazione fondamentale F, si dice che P è di* classe pari *o di* classe dispari *se rispettivamente è pari o dispari il suo numero di inversioni rispetto a F.*

Dalla definizione risulta evidente che scambiando tra loro due elementi, una permutazione cambia classe, ovvero da pari diventa dispari e viceversa. Per questioni di simmetria, si può facilmente verificare che data una permutazione fondamentale F di n numeri, il numero di permutazioni di classe pari e il numero di permutazioni di classe dispari sono uguali e pari a $n!/2$.

2.4 Il determinante di una matrice quadrata

Definizione 17 *Data una matrice quadrata $A = [a_{ik}]$, un* prodotto associato *è ogni prodotto formato da n elemeni di A appartenenti a righe e colonne sempre diverse tra loro, preso con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che la classe di permutazione dei secondi indici $_k$, rispetto alla permutazione dei primi indici $_i$, sia pari o dispari.*

Facciamo un esempio pratico. Data la matrice di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

si vede che i prodotti associati, ancora senza il loro segno, sono solo

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} \\ a_{12}a_{21} \end{cases}$$

Nel primo prodotto, essendo i primi indici $(1, 2)$ e i secondi $(1, 2)$, la classe della seconda permutazione è pari. Nel secondo prodotto, essendo i primi indici $(1, 2)$ e i secondi $(2, 1)$, la classe della seconda permutazione è dispari, per cui bisogna cambiare segno.

Definizione 18 *Il determinante di una matrice quadrata A è la somma di tutti i suoi prodotti associati.*

Definizione 19 *Se il determinante di una matrice quadrata è $= 0$, la matrice si dice singolare.*

Definizione 20 *Se il determinante di una matrice quadrata è $\neq 0$, la matrice si dice non singolare.*

L'operazione di calcolo di un determinante si indica delimitando la matrice tra parentesi verticali senza angoli, $|A|$. Riprendendo l'esempio di prima:

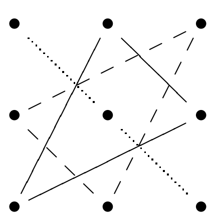
$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se n è l'ordine della matrice quadrata, si può facilmente vedere che il numero di prodotti associati è pari a $n!$, e di questi alla metà $n!/2$ occorre cambiare il segno perché di classe dispari.

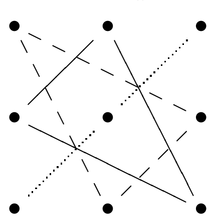
Il determinante della matrice di ordine 1 è il numero stesso:

$$|a| = a$$

Per esercizio si può calcolare il determinante di una matrice di ordine 3, e verificare la seguente semplice regola pratica: questi prodotti si prendono con il loro segno



mentre questi altri si prendono con il segno opposto:



Quando si sale con l'ordine, diventa sempre piú complesso calcolare il determinante. Possiamo però farci aiutare sfruttando qualche proprietà.

Vediamo qualche proprieà dei determinanti:

- $\det(A) = \det(A_T)$;
- scambiando in una matrice 2 righe tra loro, il determinante cambia segno;
- scambiando in una matrice 2 colonne tra loro, il determinante cambia segno;
- se una matrice ha una riga con tutti gli elementi a 0, o una colonna con tutti gli elementi a 0, il suo determinante è 0 (matrice singolare);
- se una matrice ha due colonne uguali (o due righe uguali), il suo determinante è 0 (la matrice è singolare);
- una matrice B, ottenuta moltiplicando di una matrice A una colonna (o una riga) per un numero k, ha il suo determinante pari a $k\,|A|$;
- dalle due precedenti si deduce che se una matrice ha due righe (o due colonne) proporzionali, la matrice è singolare (il suo determinante è 0);
- considerato che una matrice A può essere rappresentata come composizione dei suoi vettori colonna A_i, nel cui caso si scrive $A = [A_1 A_2 \cdots A_n]$, si può vedere che se una colonna è componibile dalla somma di due colonne, il determinante è pari alla somma dei determinanti delle matrici composte dalle colonne separatamente:

  $$A = [B + C\ A_2\ A_3\ \cdots\ A_n] \Rightarrow |A| = |BA_2A_3 \cdots A_n| + |CA_2A_3 \cdots A_n|$$

  Questo significa anche che $|A| = |A_1A_2 \cdots A_i - A_k \cdots A_k \cdots A_n|$ ovvero, se io sommo ad una colonna i tutta una colonna k della stessa matrice, il determinante non cambia. Lo stesso discorso può essere ripetuto per le righe: posso combinare le righe di una matrice, sommando o sottraendo altre righe della stessa matrice, essendo certo che il determinante non cambia.
- il determinante di una matrice quadrata non cambia se ad una sua colonna (riga) si aggiunge una combinazione lineare delle altre colonne (righe), ma non della stessa.

In seguito a queste proprietà, una tecnica manuale per calcolare il determinante di una matrice è quello di ricondurre una colonna (riga) ad avere il piú grande numero di elementi a 0, combinando linearmente le altre colonne (righe).

Per esempio, prendiamo la seguente matrice simmetrica di ordine 4, ottenuta partendo dalla prima riga e colonna di soli 1, e ottenendo gli altri elementi sommando gli elementi sopra e a sinistra:

$$A = [a_{ik}] = \begin{cases} 1 \text{ se } i = 1 \text{ oppure } k = 1 \\ a_{i-1\ k} + a_{i\ k-1} \forall i, k > 1 \end{cases}$$

Otteniamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Sottraiamo la terza riga dalla quarta, otteniamo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Adesso sottraiamo la seconda riga dalla terza, e otteniamo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Infine, sottraiamo la prima riga dalla seconda, e otteniamo

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto una matrice in cui la prima colonna ha tutti gli elementi pari a 0 tranne l'elemento sulla diagonale principale. A questo punto ripetiamo il procedimento, sottraendo la terza riga dalla quarta e quindi la seconda riga dalla terza. Come vedremo, ci avviciniamo ad una matrice diagonale superiore:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Di una cosa siamo sicuri: $\det(A) = \det(G)$. Vedremo tra poco quanto sia semplice calcolare il determinante di G, matrice triangolare superiore.

2.4.1 I teoremi di Laplace

Prima di introdurre i due teoremi di Laplace, introduciamo i concetti di *minore complementare* e di *complemento algebrico.*

Definizione 21 (Minore complementare di un elemento a_{ik}) *Data una matrice quadrata A, si prenda un suo elemento a_{ik}: il determinante della sottomatrice, ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna k, si dice* minore complementare dell'elemento a_{ik}*, e lo si indica con M_{ik}.*

Il complemento algebrico A_{ik} di a_{ik} è pari al suo minore complementare, preso con il suo segno o con il segno opposto a seconda che $i + k$ sia pari o sia dispari:

$$A_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Teorema 5 (Primo teorema di Laplace) *Il determinante di una matrice è la somma dei prodotti degli elementi di una colonna per i rispettivi complementi algebrici.*

Teorema 6 (Secondo teorema di Laplace) *La somma dei prodotti degli elementi di una colonna per i complementi algebrici degli elementi di un'altra colonna è nulla.*

Dimostriamo il secondo teorema di Laplace. Consideriamo la matrice quadrata A di ordine n, e concentriamoci su due colonne a caso, per esempio sulla prima e sulla seconda. Prendiamo la somma dei prodotti degli elementi della seconda colonna con i complementi algebrici degli elemeni della prima colonna. Abbiamo l'espressione $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1}$. Costruiamo quindi la matrice B ottenuta da A sostituendo alla prima colonna, la seconda colonna di A, e lasciando invariato tutto il resto. Ovvero

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Guardando B, sappiamo dalle proprietà dei determinanti che det(B)= 0, avendo due colonne uguali. Ma per il primo teorema di Laplace, considerando la prima colonna, $\det(B) = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1} = 0$, che è l'espressione che ci siamo costruiti prima: siamo arrivati alla tesi.

Il primo teorema di Laplace consente di calcolare il determinante di una matrice a partire da determinanti di matrici un ordine inferiore, e sta alla base di alcuni algoritmi per il calcolo di determinanti. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

Come corollario del primo teorema di Laplace, è possibile verificare che il determinante di una matrice triangolare è sempre pari al prodotto degli elementi della diagonale principale.

2.4.2 La matrice inversa

Definizione 22 *Data una marice quadrata A, di dice che B è la matrice inversa di A quando $AB = BA = I$.*

Quando una matrice è invertibile? E se è invertibile, quante matrici inverse possono esserci?

Prima di rispondere a queste due domande, introduciamo senza dimostrarlo, il teorema di Binet.

Teorema 7 (Teorema di Binet) *Date due matrici A e B quadrate dello stesso ordine, il determinante del prodotto di due matrici è pari al prodotto dei determinanti ($|AB| = |A||B|$).*

Introduciamo il concetto di matrice $\tilde{A}$ (si legge "A circonflessa") e di matrice $\overset{\star}{A}$ dei complementi algebrici.

Definizione 23 *Data la matrice quadrata A, si definisce $\tilde{A}$ quella matrice ottenuta sostituendo ad a_{ik} i rispettivi complementi algebrici A_{ik}*

Definizione 24 *Data la matrice quadrata A, si definisce matrice dei complementi algebrici $\overset{\star}{A}$ quella ottenuta trasponendo $\tilde{A}$:*

$$\overset{\star}{A} \overset{\text{def}}{=} \tilde{A}_T = [A_{ik}]_T = [A_{ki}]$$

A questo punto possiamo enunciare il teorema della invertibilità di una matrice quadrata.

Teorema 8 (Teorema dell'esistenza della matrice inversa) *Data una matrice quadrata A, essa è invertibile se e solo se non è una matrice singolare, ovvero se e solo se il suo deerminante è diverso da* 0.

La prima parte della dimostrazione ipotizza che la matrice è invertibile. Dimostriamo che non è singolare. Se è invertibile, allora esiste B tale per cui $AB = BA = I$. Per il teorema di Binet, $|AB| = |A||B| = 1$. Da questo si deduce che necessariamente il suo determinante è diverso da 0, in quanto un suo prodotto con un altro numero è pari a 1.

La seconda parte della dimostrazione parte invece dal presupposto che $|A| \neq 0$. Vediamo che è invertibile costruendo la matrice inversa, ovvero verifichiamo l'esistenza della matrice inversa indicando un procedimento che la calcoli.

Proviamo a moltiplicare $A = [a_{ik}]$ per $\overset{\star}{A} = [A_{ki}]$ (ove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik}):

$$A\overset{\star}{A} = \left[c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right]$$

Che matrice abbiamo ottenuto? Una matrice diagonale! Infatti, se $i = k$, abbiamo un numero che, per il primo teorema di Laplaceè il determinante, e questo è vero per tutti gli elementi della diagonale principale. Se invece $i \neq k$, per il secondo teorema di Laplace, è un numero pari a 0. Quindi possiamo affermare che:

$$A\overset{\star}{A} = |A|I$$

Allo stesso modo si dimostra che $\overset{\star}{A}A = |A|I$ per cui A e $\overset{\star}{A}$ sono permutabili. Per ipotesi fatta prima, $|A| \neq 0$, per cui possiamo dividere le due parti dell'uguaglianza per il determinante di A e otteniamo che:

$$A\frac{\overset{\star}{A}}{|A|} = \frac{\overset{\star}{A}}{|A|}A = I$$

Siamo giunti alla tesi, perché $\overset{\star}{A}/|A|$ è l'inversa di A, come da definizione. Siamo pronti per enunciare il teorema dell'unicità della marice inversa.

Teorema 9 (Unicità della matrice inversa) *Data una matrice quadrata A, se la matrice inversa di A esiste, allora essa è unica.*

Dimostriamo il teorema per assurdo, ipotizzando che la matrice inversa non sia unica. Se non è unica, allora esistono almeno due matrici B e C che soddisfano la condizione di matrice inversa di A:

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$

Moltiplicando la prima uguaglianza alla sinistra per C, e la seconda uguaglianza alla destra per B, otteniamo

$$\begin{gathered} C(AB) = C(BA) = C \\ (AC)B = (CA)B = B \end{gathered}$$

Per la proprietà associativa del prodotto do matrici, $C(AB) = (CA)B$. Questo lega le due eguaglianze con una ulteriore eguaglianza, e ci porta alla tesi:

$$C(AB) = C = (CA)B = B \Rightarrow C = B$$

Riprendiamo un discorso lasciato in sospeso. Consideriamo l'equazione matriciale

$$AX = B$$

Se A è quadrata non singolare, allora è invertibile, e indicando la sua matrice inversa con la notazione A^{-1} possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza sulla sinistra per la matrice inversa di A e otteniamo:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

da cui

$$X = A^{-1}B$$

Consideriamo l'espressione di matrici quadrate

$$AB = O$$

che cosa possiamo dire? Si possono presentare tre casi: A non è singolare, B non è singolare, oppure entrambe sono singolari.

$$|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}AB = B = 0$$

$$|B| \neq 0 \Rightarrow ABB^{-1} = A = 0$$

$$|A| = 0 \wedge |B| = 0 \Rightarrow AB = O$$

2.4.3 Considerazioni sulla matrice inversa

L'inversa di una matrice inversa, per definizione e per l'unicità, è la matrice originale:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Il determinante della matrice e il determinante della sua matrice inversa sono l'uno il reciproco dell'altro:

$$|A||A^{-1}| = 1$$

Infatti, per il teorema di Binet, $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$. Possiamo quindi dire che $|A|^{-1} = |A^{-1}|$: l'operatore di inversione può stare dentro o fuori dell'operatore determinante, indifferentemente.

Se due matrici quadrate sono invertibili, lo è anche il loro prodotto? Per il teorema di Binet, essendo il determinante del prodotto uguale al prodotto dei determinanti, ed essendo ciascuno dei due determinanti non nullo, allora anche il determinante della matrice prodotto non è nullo. Si verifica che:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Infatti, se al prodotto $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ applichiamo la proprietà associativa del prodotto di matrici, abbiamo che essa è uguale a $A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$.

Se A è invertibile, l'inversa della trasposta è la trasposta dell'inversa:

$$(A_T)^{-1} = (A^{-1})_T$$

Infatti, per le proprietà dell'operatore di trasposizione sull'operatore prodotto, $A_T(A^{-1})_T = (A^{-1}A)_T = I_T = I$.

Sia A una matrice di ordine $n > 1$ non singolare. Il determinante della sua matrice dei complementi algebrici $\overset{\star}{A}$ è pari al determinante di A elevato alla potenza di $n-1$:

$$|\overset{\star}{A}| = (|A|)^{n-1}$$

Abbiamo visto infatti precedentemente che $A\overset{\star}{A} = |A|I$. Per il teorema di Binet, $|A||\overset{\star}{A}| = ||A|I| = |A|^n|I|$. Siamo alla tesi.

Sia A una matrice di ordine $n > 1$ singolare. Possiamo allora dire che

$$A\overset{\star}{A} = O$$

Infatti, $A\overset{\star}{A} = |A|I$, ma $|A| = 0$, da cui la tesi.

Se $P^{-1}AP = B$, moltiplicando sul lato destro entrambi i membri dell'uguaglianza per P, otteniamo che $AP = PB$.

Se $AB = kI$, $k \neq 0$, dimostriamo che A e B sono permutabili $AB = BA$:

$$AB = kI \Rightarrow AB = BA$$

Binet ci dice che $|AB| = |kI|$. Per quanto visto poco sopra, $|kI| = k^n$. Allora $|A||B| = k^n$. Questo significa che entrambe le matrici sono invertibili. Sfruttando questo fatto, possiamo moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza, sulla sinistra, per A^{-1}. Otteniamo che $B = A^{-1}kI$. Moltiplichiamo adesso entrambi i membri per A sulla destra, otteniamo $BA = A^{-1}kIA = kI$. Siamo alla tesi.

Definizione 25 *Se $A^n = O$, la matrice A quadrata si dice nilpotente*

Verifichiamo che se A è nilpotente, allora $A - I$ e $A + I$ sono non singolari. Moltiplicando tra loro i due, otteniamo $(A - I)(A + I) = A^2 - I$. Ma, essendo A nilpotente, allora $(A - I)(A + I) = -I$. Per il teorema di Binet, siamo alla tesi: nessuno dei due determinanti può essere nullo.

2.4.4 Rango di una matrice

Prendiamo una qualunque matrice $A_{(m,n)}$, e da questa estraiamo una qualunque sottomatrice quadrata, composta da c righe e altrettante colonne.

Definizione 26 (Minore estratto da A) *Data una matrice $A_{(m,n)}$, il* minore estratto da A *è il determinante di una generica submatrice quadrata estratta da A.*

Definizione 27 (Rango di una matrice) *Data una matrice $A_{(m,n)}$, il* rango di A*, indicato con* $\mathrm{r}(A)$*, è l'ordine massimo dei minori non nulli di A. Il rango della matrice O è* 0 *per definizione.*

Per esempio, il rango di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

è 2, poiché i determinanti di tutte le sottomatrici di ordine 3 sono pari a 0, mentre almeno una di ordine 2 non nulla esiste (si vede che la terza riga è ottenuta sommando la seconda alla prima).

Alcune proprietà del rango, derivate dalle proprietà del determinante, sono le seguenti:

- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_T)$;
- scambiando tra loro due righe (colonne) di una matrice, il suo rango non cambia;
- moltiplicando una colonna per un numero diverso da 0, il rango non cambia;
- il rango di una matrice non cambia se ad una riga (colonna) si aggiunge una combinazione lineare delle altre righe (colonne).

Teorema 10 (Teorema di Kronecker) *Data una matrice $A_{(m,n)}$, che sia $\neq O$, e data una sua sottomatrice P_r di ordine r e determinante non nullo, A ha rango r se e solo se sono nulli tutti i minori estratti di ordine $r+1$ (se esistono) ottenuti aggiungedo una qualsiasi riga e colonna di A alla sottomatrice P_r.*

L'operazione con cui si aggiunge una riga e una colonna a P_r per ottenere la sottomatrice quadrata di ordine $r+1$ che include la sottomatrice P_r stessa, si chiama *orlatura*.

includereesempiodiorlatura

Il teorema di Kronecker ci consiglia di partire dai minori di piccolo ordine per calcolare il rango di una matrice.

Esercizio 1 *Determiniamo il rango della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} h & 1 & h+1 \\ 2h & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h^2 & h-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sottraendo la seconda riga all'ultima riga ...

$$\begin{bmatrix} h & 1 & h+1 \\ 2h & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h^2-2h & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... e quindi la terza riga alla prima riga, otteniamo

$$\begin{bmatrix} h & 0 & 1 \\ 2h & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h^2-2h & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto, se $h = 0$, si verifica che la prima colonna è tutta nulla, ma si individua una sottomatrice di ordine 2 non nulla, per cui il rango è 2. Se invece ipotizziamo $h \neq 0$, dividiamo la prima colonna per h, e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In questa matrice individuiamo la sottomatrice di ordine 2 ottenuta dalle righe 1 e 3, e dalle colonne 1 e 2, in cui determinante è 1. Adesso orliamo questa sottomatrice in tutti i modi possibili, e otteniamo solo 2 sottomatrici di ordine 3, i cui determinanti sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & h \\ h-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(h-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = h(h-1) + 2 = h^2 - h + 2$$

Si vede facilmente che non esiste alcun valore di $h \neq 0$ che annulli contemporaneamente le due espressioni, per cui, se $h \neq 0$, $\mathrm{r}(A) = 3$.

Teorema 11 *Il rango di una matrice $A_{(m,n)}$ è il numero massimo di sue colonne (o sue righe) linearmente indipendenti.*

Questo teorema sul rango di una qualsiasi matrice ci porta a dire che data una matrice $A_{(m,n)}$, non quadrata, dove per esempio $m < n$ (cioé con piú colonne che righe) le sue n colonne sono sicuramente linearmente dipendenti. Questo perché il suo rango non può essere superiore a m, e per il teorema sopra enunciato, ma matrice può avere al massimo m colonne linearmente indipendenti. Con un esempio pratico, possiamo dire che data la matrice composta da 4 vettori colonna di lunghezza 3

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{bmatrix}$$

per il teorema sopra esposto una colonna a caso, la colonna U è possibile ottenerla come combinazione lineare delle prime 3 colonne (ma il discorso vale per qualsiasi colonna).

Da questo teorema deriva la condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata A sia singolare: data una matrice quadrata A di ordine n, se il suo rango è n, allora $|A| \neq 0$, e viceversa. Inoltre, data una matrice quadrata A di ordine n, se il suo rango è $\neq n$, allora $|A| = 0$, e viceversa.

Che cosa succede al rango del prodotto di due matrici?

Teorema 12 *Date due matrici A e B, con A conformabile a B, si dimostra che il rango del prodotto AB è minore o uguale al minimo dei ranghi delle due matrici.*

$$\mathrm{r}(AB) \leq \min(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B))$$

Teorema 13 (Diseguaglianza di Sylvester) *Date due matrici quadrate A e B di ordine n, si dimostra che.*

$$\mathrm{r}(AB) \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) - n$$

Per esercizio, con A e B quadrate, se $AB = O$, che cosa possiamo dire del rango? Dalla diseguaglianza di Sylvester possiamo dire che $0 \geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$, ovvero che $n \geq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$: la somma dei ranghi non può essere superiore al loro ordine. Quindi, se prendiamo due matrici quadrate e la somma dei loro ranghi supera il loro ordine, possiamo dire che il prodotto delle due non genera la matrice nulla.

Per esempio, possiamo dire che il prodotto delle seguenti matrici è la matrice nulla?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = O?$$

Osserviamo che il rango della prima è pari a 3, il rango della seconda è pari a 2, per cui essendo $2 + 3 = 5 > 3$, siamo certi che il loro prodotto non è la matrice nulla.

Capitolo 3

I sistemi lineari

Definizione 28 (Equazione lineare) *Una equazione lineare è una equazione algebrica di primo grado esprimibile con la seguente espressione:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b$$

Essa ammette come soluzione ogni n-pla ordinata $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ che, sostituita ordinatamente alle incognite x_j, rende il primo membro uguale al secondo.

Un *sistema lineare* è un insieme ordinato di m equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La *soluzione di un sistema lineare* è ogni soluzione comune a tutte le equazioni lineari componenti. Il sistema si dice *impossibile* se la soluzione non esiste; il sistema si dice *possibile* se esiste almeno una soluzione. Il sistema è *determinato* se le soluzioni sono in numero finito; il sistema è *indeterminato* se le soluzioni sono in numero infinito.

Si può facilmente verificare che ogni sistema lineare può essere espresso come prodotto matriciale, e viceversa. Inoltre, ogni soluzione del sistema lineare è anche soluzione del prodotto matriciale equivalente. Ad esempio, date le seguenti 3 matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

si verifica l'equivalenza delle seguenti due espressioni:

$$AX = B$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$$

Introduciamo un teorema fondamentale sulle soluzioni dei sistemi lineari.

Teorema 14 (Teorema di Cramer) *Un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti A è quadrata e non singolare, ha una ed una sola soluzione, costituita dalla n-pla*

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ x_2 &= \tfrac{\det(A_2)}{\det(A)} \\ &\vdots \\ x_n &= \tfrac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{aligned}$$

dove $\det(A_j)$ *è il determinante della matrice* A_j *ottenuta da A sostituendo la matrice vettore B dei termini noti alla j-ma colonna di A.*

Dimostriamo il teorema, partendo dal fatto che la matrice dei coefficienti A quadrata è non singolare: dimostriamo che la soluzione c'è ed è unica. Sappiamo che, data l'espressione matriciale equivalente

$$AX = B$$

essendo A non singolare, possiamo calcolarne l'inversa e moltiplicarla alla sinistra dell'espressione. Otteniamo

$$X = A^{-1}B$$

e la prima parte del teorema è dimostrata. Vediamo che espressione abbiamo ottenuto con $A^{-1}B$, sviluppandolo. Ricordiamo che:

$$A^{-1} = \frac{\overset{*}{A}}{\det(A)}$$

Inoltre ricordiamo che $\overset{*}{A}$ è la matrice dei complementi algebrici, in cui $\overset{*}{A} = [\alpha_{ik} = A_{ki}]$ (notare l'inversione degli indici k e i). Per approfondimenti, consulta la definizione 24 (p. 21). Quindi

$$X = \left[x_i = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{ip} b_p = \frac{1}{\det(A)} \sum_{p=1}^{n} A_{pi} b_p \right]$$

Prendiamo la matrice A in cui alla colonna i-ma sostituiamo il vettore colonna B. Otteniamo la matrice A_i cosiffatta:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Il determinante di questa matrice, per il primo teorema di Laplace (cfr. p. 19), sappiamo essere la somma dei prodotti degli elementi della colonna i per i rispettivi complementi algebrici:

$$\det(A_i) = |A_i| = \sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j$$

Questa è esattamente la definizione di x_i, a meno della costante $1/|A|$, e quindi siamo arrivati alla tesi, ovvero che la matrice vettore costruita secondo la regola definita nel teorema di Cramer, costituisce una soluzione al sistema lineare $AX = B$.

Facciamo un semplice esercizio. Prendiamo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ha determinante 2, quindi il sistema ammette una ed una sola soluzione:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} \\ \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.1 Soluzione di un sistema lineare generico

Non tutti i sistemi lineari presentano la matrice dei coefficienti con il determinante diverso da 0, ma possonp presentare delle soluzioni.

Teorema 15 (Teorema di Rouché-Capelli) *Dato un generico sistema lineare*

$$AX = B$$

e definita con matrice completa, indicata con A', la matrice ottenuta affiancando B ad A, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare abbia soluzione è che il rango di A e A' siano uguali:

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A')$$

Si vede che il teorema di Cramer è un caso particolare di questo.

Per scoprire se un sistema lineare ha soluzioni, il teorema ci consiglia di trovare un minore P_r qualsiasi che determina il rango della matrice. Individuato il minore P_r, se i nuovi minori ottenuti orlando P_r con il vettore dei termini noti B hanno determinante diverso da 0, ovvero il rango aumenta, allora il sistema non ha soluzioni, altrimenti ne ha.

Consideriamo il caso di un generico sistema lineare che ammette soluzioni. Come le troviamo? Individuiamo l'insieme delle righe e delle colonne che determinano il minore di rango massimo r. Per quello che abbiamo visto, tutte le altre equazioni lineari che non contengono il minore, possono essere espresse come combinazione lineari delle precedenti, e quindi possono essere eliminate. Rimane il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Riscrivendo il sistema portando alla destra dell'uguale, tutti i termini che non contengono il minore, otteniamo il seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)} - \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)} - \dots \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)} - \dots \end{cases}$$

In questa situazione, siamo davanti ad un sistema "tipo Cramer", in cui il determinante della matrice dei coefficienti è non nulla. I coefficienti al secondo membro sono tutti arbitrari, ma a seconda dei valori che assumono, determinano una ed una sola soluzione. Questo fatto si esprime dicendo che c'è un numero di scelte infinito pari a ∞^{n-r}, e per convenzione $\infty^0 = 1$, ovvero nel caso classico abbiamo una sola soluzione.

Dimostriamo il Teorema 15 di Rouché-Capelli. Partiamo da $AX = B$, e ipotizziamo che A e A' abbiano lo stesso rango. Possiamo allora con certezza dire che B è composizione lineare dei vettori colonna componenti A:

$$B = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots x_nA_n$$

(se cosí non fosse, infatto, il rango sarebbe diverso). Siamo arrivati alla prima parte della tesi, perché sappiamo che la n-pla di valori esiste.

Per la seconda parte della dimostrazione, partiamo dall'assunto che il sistema ammette una soluzione, e dimostriamo l'eguaglianza del rango. Se il sistema ammette una soluzione, significa che esiste una n-pla di valori che soddisfano il sistema

$$B = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots x_nA_n$$

Ma questo significa che B è combinazione lineare delle colonne di A, e per quanto visto precedentemente, affiancando B alle colonne di A otteniamo una matrice con il medesimo rango (cioé B non cambia il rango di A)

Definizione 29 (Sistema lineare omogeneo) *Un sistema lineare si dice omogeneo quando il vettore dei termini noti è nullo:*

$$AX = O$$

Un sistema omogeneo ha almeno una soluzione rappresentata da $X = O$, potrebbe avere soluzioni in cui i termini sono non tutti nulli, ed allora si parla di *autosoluzioni*. Se n è il numero delle incognite e r il rango della matrice A dei coefficienti, abbiamo visto che il sistema presenta un numero di soluzioni pari a ∞^{n-r}:

- se $r = n$, l'unica soluzione possibile è il vettore O;
- se $r < n$, abbiamo infinite autosoluzioni.

Facciamo un esempio. Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

Esso è un sistema omogeneo di 2 equazioni e 4 incognite. Esso sicuramente ammette autosoluzioni essendo il rango della matrice dei coefficienti pari a 2.

Il numero di soluzioni è dunque ∞^2. Come abbiamo visto, individuando nella sottomatrice dei coefficienti di x e y quella che dà il rango, possiamo risolvere il sistema scrivendo cosí la soluzione

$$\begin{cases} x = \frac{-z+4w}{2} \\ y = \frac{3z-2w}{2} \end{cases}$$

In generale, possiamo esprimere cosí le infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = \alpha z + \beta w \\ y = \gamma z + \delta w \end{cases}$$

Si vede che è possibile esprimere tutte le infinite soluzioni come combinazione lineare di due vettori colonna particolari tra loro linearmente indipendenti:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$X = zX_1 + wX_2$$

Essi sono sicuramente linearmente indipendenti, poiché i valori costanti formano una piccola matrice diagonale. La costruzione di questi particolari vettori colonna può essere effettuata per sistemi lineari omogenei di ogni grado, ed esprimere la generica soluzione ∞^{n-r} cosí:

$$X = \sum_{i=1}^{n-r} x_{i+r} X_i$$

dove X_i il vettore colonna, e $x_j,\ j = r+1, r+2, \dots n$ rappresenta le generiche incognite arbitrarie.

Come caso particolare, prendiamo un sistema omogeneo di m equazioni e $m+1$ incognite, in cui il rango della matrice dei coefficienti è m. In questo caso il sistema ha ∞^1 autosoluzioni. Solo una autosoluzione è linearmente indipendente, tutte le altre autosoluzioni sono sua combinazione lineare:

$$X = x_{m+1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora enunciare il seguente teorema sulla soluzione dei sistemi omogenei.

Teorema 16 *Un sistema omogeneo di m equazioni in $m+1$ incognite, in cui la matrice dei coefficienti $A_{(m,m+1)}$ ha rango m, ammette ∞^1 autosoluzioni; ciascun elemento componente ogni autosoluzione è proporzionale al minore estratto dalla matrice dei coefficienti cancellando la corrispettiva colonna, preso col suo segno o con l'opposto a seconda dell'indice dell'elemento.*

Vediamo il teorema applicato ad un sistema di 2 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

Sappiamo per ipotesi che la matrice è di rango 2, supponiamo che il minore non nullo sia rappresentato dai coefficienti di x e y. Risolvendo il sistema si trova che:

$$\begin{cases} x = z\dfrac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ y = -z\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \end{cases}$$

Come si vede, il fattore

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

è comune ad entrambe le soluzioni, chiamiamolo k, per cui possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = k\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ y = -k\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \\ z = k\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{cases}$$

che è la tesi del teorema.

3.2 Autovalori

D'ora in avanti tratteremo con matrici quadrate, per cui, se non specificato, tutte le matrici saranno tali.

Definizione 30 (Matrici quadrate simili) *Date due matrici quadrate A e B, A si dice simile a B se esiste una matrice P non singolare tale per cui sussiste l'uguaglianza*

$$B = P^{-1}AP$$

Questa relazione di similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza, perché gode delle proprietà:

1. *riflessiva*: ogni matrice è simile a sé stessa in quanto $A = I^{-1}AI$;
2. *simmetrica*: se A è simile a B, anche B è simile ad A. Infatti $A = (P')^{-1}BP'$ in cui $P' = P^{-1}$;
3. *transitiva*: se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C. Infatti, se $B = P^{-1}AP$ e $C = Q^{-1}BQ$ è semplice verificare che $C = (P')^{-1}AP'$ in cui $P' = PQ$.

Definizione 31 (Matrice caratteristica di A) *Data una matrice quadrata A, dato un numero λ, si definisce matrice caratteristica di A la matrice $\lambda I - A$.*

Definizione 32 (Polinomio caratteristico di A) *Data una matrice quadrata A, il polinomio caratteristico di A è il determinante della matrice caratteristica di A.*

Esercizio 2 *Proviamo a calcolare il polinomio caratteristico di una matrice* 2×2*:*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

In questo caso particolare, si vede che:

1. il grado del polinomio caratteristico è pari all'ordine della matrice;
2. il coefficiente della potenza piú elevata di λ (2 in questo caso), detto coefficiente direttore, è pari ad 1;
3. il secondo coefficiente è l'opposto della traccia di A.
4. il termine noto del polinomio è il determinante di A;

In generale possiamo dire che

1. il grado del polinomio caratteristico è pari all'ordine della matrice;
2. il coefficiente direttore è pari ad 1;
3. il secondo coefficiente è l'opposto della traccia di A. Infatti ogni prodotto associato di $\lambda I - A$, che non sia il prodotto degli elementi principali, può al piú essere un polinomio in λ di grado $n-2$, quindi il coefficiente del termine λ^{n-1} è dato necessariamente solo dal prodotto associato della traccia di $\lambda I - A$: $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$, da cui si verifica quanto espresso.
4. il termine noto del polinomio, a meno del segno, è il determinante di A. Vedremo dimostrata questa affermazione poco piú avanti.

Definizione 33 (Autovalore di una matrice) *L'autovalore è una radice del polinomio caratteristico quando questo è posto a 0, ovvero è una soluzione dell'equazione*

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ogni matrice quadrata di ordine n ha esattamente n autovalori.

Dal teorema fondamentale dell'algebra, sappiamo che un polinomio in una variabile x di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi, ha esattamente n radici. Questo significa che possiamo esprimere un generico polinomio $P_n(x)$, in cui P_0 è il termine direttore, nella seguente equivalente maniera, detta *fattorizzazione del polinomio*:

$$P_n(x) = P_0 \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

ove x_j rappresenta le soluzioni del polinomio. In maniera analoga possiamo esprimere il polinomio caratteristico della matrice, sapendo che $P_0 = 1$ e indicando con λ_i il generico autovalore:

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j)$$

Definizione 34 (Grado di molteplicità) *Il grado di molteplicità di una radice è il numero di volte in cui la radice compare nella fattorizzazione del polinomio.*

Teorema 17 *Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

La dimostrazione è la seguente. Se A e B sono simili, allora ad esempio $A = P^{-1}BP$. Il polinomio caratteristico di A è $|\lambda I - A|$ ovvero $|\lambda I - P^{-1}BP|$. Poiché vale l'identità $I = P^{-1}P$, possiamo scrivere che $|\lambda I - P^{-1}BA| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}BP|$, ovvero, per le proprietà del prodotto di matrici $|P^{-1}(\lambda I - B)P|$. Per le proprietà dei determinanti, $|P^{-1}(\lambda I - B)P| = |P^{-1}||(\lambda I - B)||P| = |(\lambda I - B)|$. Siamo arrivati alla tesi.

Si stia bene attenti che non è vero il contrario, cioé non è vero che se due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, esse sono simili. Una prova è infatti data dalla seguente coppia di matrici:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che esse hanno lo stesso polinomio caratteristico, ma è altrettanto chiaro che la matrice identità I è simile solo a sé stessa, e quindi non può essere simile a B.

Teorema 18 *Il determinante di una matrice quadrata A è il prodotto degli autovalori.*

La dimostrazione si basa sul fatto che il polinomio caratteristico $|\lambda I - A|$ sia valido qualunque valore abbia λ. Che cosa diventa il polinomio caratteristico per $\lambda = 0$? Indicando con λ_j il generico autovalore, possiamo scrivere dalla definizione di polinomio caratteristico

$$| - A| = \prod_{j=1}^{n} (-\lambda_j)$$

il che implica che

$$-1^n |A| = -1^n \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j)$$

da cui la tesi:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j)$$

Dalla dimostrazione di questo teorema abbiamo anche verificato l'affermazione precedente tale per cui il termine noto del polinomio caratteristico, a meno del segno, sia il determinante della matrice.

Un corollario a questo teorema è l'evidenza che in una matrice triangolare, gli autovalori siano gli elementi della diagonale principale. Se infatti δ_j è il generico elemento della diagonale, si vede facilmente che il polinomio caratteristico è esprimibile come $(\lambda - \delta_1)(\lambda - \delta_2)\dots(\lambda - \delta_n)$, da cui la tesi.

3.3 Rango e autovalori

Data una matrice $A_{(n,n)}$, e dato λ_j un autovalore di A con molteplicità k, vale la seguente relazione (di cui non diamo la dimostrazione):

$$\mathrm{r}(\lambda_j I - A) + k \geq n$$

Notiamo comunqueil rango di $\lambda_j I - A$ è sicuramente inferiore a n.

Definizione 35 *Si dice che un autovalore è regolare quando*

$$\mathrm{r}(\lambda_j I - A) + k = n$$

Si dimostra facilmente il seguente teorema:

Teorema 19 *Tutti gli autovalori semplici (ovvero con molteplicità pari ad 1) sono regolari.*

Dalla relazione precedente possiamo infatti dire che

$$\mathrm{r}(\lambda_j I - A) + 1 \geq n \Rightarrow \mathrm{r}(\lambda_j I - A) \geq n - 1$$

È però altrettanto vero che $\mathrm{r}(\lambda_j I - A) < n$. Possiamo riassumere le due espressioni così:

$$n > \mathrm{r}(\lambda_j I - A) \geq n - 1$$

L'unico valore che soddisfa la coppia di diseguaglianze è necessariamente

$$\mathrm{r}(\lambda_j I - A) = n - 1$$

da cui la tesi.

3.4 Autovalori e polinomi matriciali

Teorema 20 *Data la matrice quadrata $A_{(n,n)}$, siano $\lambda_j,\ j = 1, 2, \dots n$ i suoi autovalori, e sia $P(x)$ un polinomio della variabile x. Si dimostra che gli autovalori del polinomio matriciale $P(A)$ sono $P(\lambda_j),\ j = 1, 2, \dots n$.*

Per esempio, se una matrice A ha come autovalori 2 e 3, la matrice A^2 avr come autovalori 4 e 9.

Teorema 21 *Date le matrici quadrate $A_{(n,n)}$ e $B_{(n,n)}$, si dimostra che il polinomio paratteristico di AB è uguale al polinomio caratteristico di BA.*

Esercizio 3 *Sia A una matrice quadrata di ordine 2, per la quale valgono le seguenti relazioni:*

$$\det(I - A) = 0$$
$$\det(A^{-1}(2I - A)) = 0$$

Che cosa possiamo dire degli autovalori di A?

Per la prima relazione, siamo certi che un autovalore è di certo 1.

Dalla seconda deduciamo che A è invertibile, per cui l'altro autovalore non può essere 0. Per il teorema di Binet abbiamo che

$$\det(A^{-1})\ \det(2I - A) = 0$$

da cui, dividendo entrambi i termini per il determinante di A^{-1}, abbiamo che

$$\det(2I - A) = 0$$

Questo significa che l'altro autovalore è 2.

Esercizio 4 *Che cosa possiamo dire degli autovalori di una matrice quadrata nilpotente, tale cioè per cui $A^k = O$?*

Dai teoremi visti in precedenza, sappiamo che se λ_j è autovalore di A, allora λ_j^n è autovalore di A^k. Ma per ogni j, $\lambda_j^n = 0$ per cui possiamo dire che tutti gli autovalori di una matrice nilpotente sono 0.

Esercizio 5 *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$$

quando i suoi autovalori sono regolari?

La matrice è triangolare, per cui i suoi autovalori sono 1, 2 e 2. L'autovalore 1 è necessariamente regolare, apparendo soltanto una volta. Ma l'autovalore 2 appare 2 volte: affinché sia regolare, deve valere la relazione:

$$\mathrm{r}(2I - A) + 2 = 3 \Rightarrow \mathrm{r}(2I - A) = 1$$

La matrice

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

non è sicuramente di rango 3. Essa ha rango 1 solamente quando tutte le sottomatrici di ordine 2 hanno il determinante nullo. Potenzialmente, facendo tutte le combinazioni, ne rimangono solamente 2, di cui forziamo l'eguaglianza a 0 del relativo determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b & -c \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ -b & -c \end{vmatrix} = 0$$

Otteniamo il seguente sistema in 2 equazioni:

$$\begin{cases} -c = 0 \\ -ac = 0 \end{cases}$$

Si verifica che è sufficiente imporre $c = 0$, che gli autovalori di A sono sempre regolari.

3.5 Autovettori

Definizione 36 *Data la matrice quadrata A, l'autovettore di A è ogni vettore (colonna) non nullo X che soddisfa la seguente equazione matriciale:*

$$(\lambda I - A)X = O$$

Studiamo un attimo la definizione. Se $\lambda I - A$ è non singolare, allora l'unico autovettore è necessariamente il vettore colonna O. In generale, l'espressione $(\lambda I - A)X = O$ rappresenta un sistema omogeneo cosiffatto:

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \ldots + (\lambda - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

Ammette soluzioni? Possiamo dire che, se $\mathrm{r}(\lambda I - A) < n$, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, e quindi esistono infiniti autovettori. Dunque otteniamo autovettori di A solo se $\det(\lambda I - A) = 0$, ovvero solo se λ è un autovettore.

Esercizio 6 *Trovare gli autovettori della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Vediamo di scrivere il sistema omogeneo $\lambda I - A = O$:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 0 \\ -4x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti e poniamolo uguale a 0:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

Le autosoluzioni sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$.

Caso $\lambda_1 = 5$.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -4x + -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \; y = 2x$$

Caso $\lambda_2 = -1$

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -4x + -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \; y = -x$$

Gli autovettori sono dunque

$$X_1 = h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; X_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esistono esattamente $n - r$ autovettori indipendenti associati a ogni autovettore λ_j. Individuando con k_j la molteplicità dell'autovettore λ_j, sappiamo che $k_j + r \geq n$: deduciamo che $k_j \geq n - r$, ovvero che la molteplicità k_j è maggiore o uguale al numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ_j. Se l'autovalore è regolare, il numero di autovettori linearmente indipendenti è pari esattamente a k_j.

Quanti autovettori linearmente indipendenti possiede una generica matrice quadrata $A_{(n,n)}$? Poiché sappiamo che $\sum_{j=1}^{n} k_j = n$, deduciamo che, nella migliore delle ipotesi quando tutti gli autovalori sono regolari, il numero di autovettori linearmente indipendenti è esattamente n, di solito è un numero inferiore a n.

Qual'è il significato "fisico" di un autovettore? Un autovettore è un vettore che moltiplicato per una matrice rimane multiplo di sé stesso. Se λ è infatti un autovalore, la relazione con i suoi autovettori può anche essere scritta cosí:

$$\lambda X = AX$$

Tutti gli autovettori X_i associati ad un generico autovalore λ, se combinati linearmente, determinano a loro volta un autovettore di λ, ovvero un vettore che moltiplicato per A rimane multiplo di sé stesso.

Analizziamo qualche proprietà di autovettori, enunciando e dimostrando il seguente teorema.

Teorema 22 *Siano $\lambda_j,\ j = 1, 2, \dots k$ una k-pla di autovettori distinti associati ad una matrice A. Ogni autovettore X associato ad un autovalore λ_j è linearmente indipendente rispetto a tutti gli autovettori associati a qualsiasi altro autovettore $\lambda_f, f \neq j$.*

Siano X_a e X_b due autovettori associati ai due autovalori distinti λ_a e λ_b. Sappiamo che $\lambda_a X_a = AX_a$ e che $\lambda_b X_b = AX_b$. Se per assurdo fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbero due coefficienti non nulli α e β tale per cui $\alpha X_a + \beta X_b = O$. Riassumendo:

$$\begin{cases} \lambda_a X_a = AX_a \\ \lambda_b X_b = AX_b \\ \alpha X_a + \beta X_b = O \end{cases}$$

Poiché α e β non sono nulli, moltiplichiamo la prima relazione per α e la seconda per β, e otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_a \alpha X_a = A\alpha X_a \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a + \beta X_b = O \end{cases}$$

Sommiamo tra loro le prime due equazioni, e otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_a \alpha X_a + \lambda_b \beta X_b = A\alpha X_a + A\beta X_b \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a + \beta X_b = O \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_a \alpha X_a + \lambda_b \beta X_b = A(\alpha X_a + \beta X_b) \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a + \beta X_b = O \end{cases}$$

La parte sinistra della prima equazione comprende il termine dell'ultima, equivalente alla matrice O. Allora possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \lambda_a \alpha X_a + \lambda_b \beta X_b = O \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a = -\beta X_b \end{cases}$$

da cui, sostituendo nella prima equazione il termine dell'ultima, abbiamo

$$\begin{cases} \lambda_a(-\beta X_b) + \lambda_b \beta X_b = O \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a = -\beta X_b \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \beta X_b(-\lambda_a + \lambda_b) = O \\ \lambda_b \beta X_b = A\beta X_b \\ \alpha X_a = -\beta X_b \end{cases}$$

Siccome per ipotesi λ_a e λ_b sono diversi tra loro e da 0, possiamo dividere per la loro differenza, sicuramente nulla, ottenendo che $\beta X_b = O$. Qui siamo all'assurdo, in quanto né β né X_b possono essere nulli.

Verifichiamo ora un'altra proprietà interessante degli autovettori. Se

$$\lambda X = AX$$

proviamo a moltiplicare entrambi i membri per A sulla sinistra. Otteniamo

$$\lambda AX = A^2X$$

Ma sappiamo che $AX = \lambda X$, per cui

$$\lambda^2 X = A^2 X$$

Possiamo iterare il procedimento a piacimento. Abbiamo cosí scoperto che X è un autovettore di una potenza j di A (A^j), che ha autovalore λ^j.

Analogamente, moltiplicando per un coefficiente k entrambi i membri dell'uguaglianza, si vede che X è autovettore di kA, il cui autovalore è $k\lambda$.

In generale, si può vedere che, iterando e combinando i due passi precedenti, dato un polinomio qualunque $f(x)$, se X è autovettore di A associato all'autovettore λ, allora X è anche autovettore di $f(A)$ associato all'autovalore $f(\lambda)$.

3.6 Diagonalizzazione di una matrice quadrata

Riprendiamo la relazione di similitudine, tale per cui si dice che A è simile a B quando esiste una matrice P tale per cui

$$B = P^{-1}AP$$

Se B è una matrice diagonale, allora A si dice *diagonalizzabile*. Di B sono facilmente noti gli autovalori, coincidenti con gli elementi della diagonale principale, e notiamo che sono gli stessi di A. Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

Teorema 23 (Primo Teorema sulla diagonalizzazione) *Una matrice quadrata $A_{(n,n)}$ è diagonalizzabile se e solo se A ammette n autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostriamo il teorema. Partiamo dapprima dall'ipotesi che A sia diagonalizzabile. Allora esiste una matrice P tale per cui

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

Essendo P invertibile, possiamo scrivere

$$AP = P \ \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

Evidenziando la composizione di P con i suoi n vettori verticali, e indicandola con $P = [P_1 P_2 \cdots P_n]$, possiamo riscrivere cosí la relazione precedente

$$[AP_1 \ AP_2 \cdots AP_n] = \text{diag}(\lambda_1 P_1 \ \lambda_2 P_2 \cdots \lambda_n P_n)$$

Questa possiamo scriverla anche cosí:

$$\begin{cases} AP_1 = \lambda_1 P_1 \\ AP_2 = \lambda_2 P_2 \\ \vdots \\ AP_n = \lambda_n P_n \end{cases}$$

Che cosa ci dice questo sistema? Innanzitutto che i P_j sono tutti autovettori di A. I vari P_j sono sicuramente tra loro linearmente indipendenti, in quanto la matrice P è invertibile. Siamo giunti alla prima parte della testi. Partiamo ora dall'ipotesi che A ammette n autovettori linearmente indipendenti. Per dimostrare questa parte possiamo fare il ragionamento di prima a ritroso, ritrovando la matrice P che consente di trasformare A in una matrice diagonale B.

La dimostrazione di questo teorema ci dice come costruire una matrice diagonale simile ad una matrice A diagonalizzabile: si prendono gli n autovalori linearmente indipendenti, si accostano trovando P.

La dimostrazione ci dice anche come trovare la matrice A dati gli autovalori e gli autovettori:

$$A = P \ \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) P^{-1}$$

Teorema 24 (Secondo Teorema sulla diagonalizzazione) *Due matrici A e B, entrambe diagonalizzabili, sono simili se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Cominciamo con il notare he se A è diagonalizzabile e B non lo è, le due matrici tra loro non possono essere simili. Ipotizziamo dunque che le matrici, diagonalizzabili, abbiamo lo stesso polinomio caratteristico, e dimostriamo che sono simili. (Non dimostreremo la seconda parte.) Le due matrici hanno allora gli stessi autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Siano $X_1, X_2, \dots X_n$ e $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ gli autovettori linearmente indipendenti rispettivamente di A e di B. Detta X la matrice ottenuta componendo ordinatamente gli autovettori X_j, e analogamente Y, possiamo scrivere che

$$X^{-1}AX = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

$$Y^{-1}BY = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

Da cui $Y^{-1}BY = X^{-1}AX$. Da qui possiamo allora dire che

$$B = YX^{-1}AXY^{-1} = (XY^{-1})^{-1}A(XY^{-1})$$

e inoltre che

$$A = XY^{-1}BYX^{-1} = (YX^{-1})^{-1}B(YX^{-1})$$

che è la tesi.

Esercizio 7 *Quando due matrici quadrate sono simili tra di loro?*

Con le conoscenze che abbiamo acquisito fino a questo punto, andiamo a vedere dapprima il loro polinomio caratteristico:

- *le matrici non hanno lo stesso polinomio caratteristico.* Sicuramente le matrici non sono simili.

- *le matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico.* In questo caso esistono tre sottocasi:

  1. *le matrici sono diagonalizzabili*: le matrici sono simili
  2. *una matrice è diagonalizzabile e l'altra no*: le matrici non sono simili
  3. *nessuna matrice è diagonalizzabile*: a priori non possiamo dire nulla, dobbiamo risolvere il sistema per trovare la matrice che le rende simili, ovvero

$$\begin{cases} AP = PB \\ \det(P) \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 25 (Terzo Teorema sulla diagonalizzazione) *Una matrice quadrata $A_{(n,n)}$ è diagonalizzabile se e solo se i suoi t autovalori sono tutti regolari, cioé*

$$\mathrm{r}(\lambda_j I - 2A) + k_j = n,\ \ j = (1, 2, \dots t)$$

Dimostriamo la prima parte, ipotizzando che A sia diagonalizzabile. Sia k_j la molteplicità dell'autovalore λ_j. Indicando con t il numero di autovalori distinti, sappiamo per definizione che

$$n = \sum_{j=1}^{t} k_j,\ \ t \leq n$$

Per il primo teorema sulla diagonalizzazione, sappiamo anche che ogni autovalore λ_j genera esattamente k_j autovettori linearmente indipendenti, il cui numero totale è esattamente n. Quindi n autovettori possono essere generati solamente se tutti gli autovalori sono regolari (se uno solo non lo fosse, la somma farebbe un numero inferiore a n). Non dimostriamo la seconda parte. Diciamo però che siamo certi che k_j è esattamente il numero di autovettori linearmente indipendenti. La somma per definizione dà n.

Come corollario possiamo dire che, se la molteplicità di tutti gli autovalori è 1, poiché sono regolari, allora la matrice è necessariamente diagonalizzabile.

Che cosa possiamo dire quando gli n autovalori hanno tutti lo stesso valore? La matrice potrebbe essere diagonalizzabile? Dal teorema precedente possiamo dire che gli autovalori devono essere regolari, ovvero:

$$\mathrm{r}(\lambda I - A) + k = n$$

ovvero

$$\mathrm{r}(\lambda I - A) + n = n$$

cioé

$$\mathrm{r}(\lambda I - A) = 0$$

L'unica matrice a rango nullo è la matrice nulla, quindi necessariamente $A = \lambda I$: l'unica matrice diagonalizzabile con autovalori tutti uguali è una matrice scalare.

Esercizio 8 *Per quali valori di a, b e c la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sfruttando i teoremi che conosciamo, possiamo dire che gli autovalori 1 e 2 devono essere regolari. 2 lo è per forza: possiamo imporre che 1 sia un autovalore regolare, ovvero

$$\mathrm{r}(I - A) + 2 = 3$$

$$\mathrm{r}(I - A) = 1, \; I - A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Affinché sia di rango 1, tutti i minori di ordine 2 devono essere nulli. Si vede facilmente che i determinanti di quelli che possono essere non nulli sono solo:

$$\begin{cases} a = 0 \\ -ac = 0 \end{cases}$$

Si vede quindi che è sufficiente imporre che $a = 0$ per avere che la matrice è sempre diagonalizzabile.

Arriviamo dunque a questo teorema, che non dimostreremo.

Teorema 26 *Ogni matrice quadrata A è simile ad una matrice triangolare superiore (o inferiore) che ha come elementi principali gli autovalori di A.*

Siamo pronti a enunciare l'importante teorema di Cayley-Hamilton

Teorema 27 (Teorema di Cayley-Hamilton) *Ogni matrice quadrata A è radice del suo polinomio caratteristico.*

Dimostriamo il teorema per una matrice A diagonalizzabile, ma con il teorema 26 possiamo generalizzarlo a tutte le matrici. Ricordiamo che il polinomio caratteristico, se λ_j è l'autovalore generico, può essere espresso cosí:

$$\phi(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j)$$

Se A è diagonalizzabile, allora esiste una P invertibile tale per cui

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = D$$

Sviluppando il polinomio caratteristico con A e moltiplicando opportunamente ogni termine per $I = PP^{-1}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \phi(A) &= PP^{-1}(A - \lambda_1 I)PP^{-1}(A - \lambda_2 I) \dots PP^{-1}(A - \lambda_n I)PP^{-1} \\ &= P(P^{-1}(A - \lambda_1 I)P)(P^{-1}(A - \lambda_2 I)P) \dots (P^{-1}(A - \lambda_n I)P)P^{-1} \\ &= P(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \dots (D - \lambda_n I) \end{aligned}$$

La matrice $D - \lambda_j I$ è una matrice diagonale in cui in j il relativo autovalore è posto a 0: è una matrice con una colonna tutta nulla. Si vede facilmente che questo tipo di matrice pone a 0 la relativa colonna di qualsiasi matrice a cui viene moltiplicata. Poiché $j = 1, 2, \ldots n$, tutte le colonne della matrice prodotto sono nulle. Siamo arrivati alla tesi:

$$\phi(A) = O$$

Una conseguenza molto interessante del teorema è che tutte le potenze da 0 a n della matrice A sono linearmente dipendenti:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

Inoltre, si vede che tutte le potenze $m \geq n$ di A possono essere espresse come combinazione lineare delle potenze di A da 0 a $n-1$. Infatti, dall'espressione sopra possiamo dire che

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \ldots - a_{n-1}A - a_n I$$

e inoltre

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -a_1 A^n - a_2 A^{n-1} - \ldots - a_{n-1}A^2 - a_n A \\ &= -a_1(-a_1 A^{n-1} - \ldots - a_{n-1}A - a_n I) - a_2 A^{n-1} - \ldots - a_{n-1}A^2 - a_n A \end{aligned}$$

Esercizio 9 *Trovare la potenza 3 della seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $(\lambda - 1)(\lambda - 3) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$. Possiamo quindi dire che $A^2 - 4A - 5I = 0$ da cui $A^2 = 4A + 5I$. Per il calcolo della potenza terza di A possiamo scrivere che $A^3 = 4A^2 + 5A$ da cui, per sostituzione, otteniamo che $A^3 = 4(4A + 5I) + 5A$, ovvero $A^3 = 21A + 20I$.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due polinomi con coefficienti non nulli. Si dimostra in generale che esistono sempre due polinomi $q(x)$ e $r(x)$, in cui il grado di r è inferiore al grado di g, tale per cui

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

da cui è anche possibile dire che

$$f(A) = g(A)q(A) + r(A)$$

Se $g(A)$ fosse il polinomio cratteristico, equivalente a 0, significa che qualsiasi polinomio $f(A)$ sarebbe riconducibile ad un polinomio $r(A)$ di grado inferiore al grado di $g(A)$, ovvero inferiore all'ordine n della matrice.

Possiamo dunque affermare che *qualunque espressione polinomiale in una matrice quadrata A di qualsiasi grado, può essere ricondotto ad una espressione polinomiale in A di grado inferiore all'ordine n della matrice A.*

Vediamo un trucco per ricavarci la matrice inversa di A. Ricordiamo che il coefficiente a_n del polinomio caratteristico, quello che accompagna la matrice unità I, a meno del segno è il determinante della matrice A. Se la matrice non è singolare, possiamo allora dire che

$$I = -\frac{1}{a_n}(A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A)$$

Moltiplicando entrambi i membri per A^{-1} otteniamo la seguente espressione

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1}I)$$

Il risultato è molto interessante: la matrice inversa di A è ottenibile come combinazione lineare di varie potenze da 0 a $n-1$ della matrice A.

Proseguendo con le nostre considerazioni, è altresí chiaro che A^{-1} è una espressione polinomiale in A:

$$A^{-1} = f(A)$$

Per il teorema 20, sappiamo che gli autovalori di $f(A)$ sono $f(\lambda_i)$, per cui gli autovalori della matrice inversa di A sono espressione polinomiale degli autovalori di A:

$$\begin{array}{l} f(\lambda_i) = -\frac{1}{a_n}(\lambda_i^{n-1} + a_1\lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) \\ i = 1, 2, \ldots n \end{array}$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'eguaglianza per λ_i otteniamo

$$\lambda_i f(\lambda_i) = -\frac{1}{a_n}(\lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda_i)$$

ovvero

$$\lambda_i f(\lambda_i) = -\frac{1}{a_n}(-a_n) = 1$$

Che cosa possiamo dunque dire degli autovalori di una matrice inversa? Gli autovalori della matrice inversa A^{-1} sono gli inversi degli autovalori della matrice A.

Esercizio 10 *Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori: si vede che essi sono la radice della seguente equazione

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 5 = 0$$

Sappiamo che può essere difficoltoso calcolare le radici di un polinomio di grado 3. A noi però interessa verificare se gli autovalori sono regolari, meglio se distinti. Ricorriamo allora a quel teorema che dice che *un polinomio f(x) ha una radice multipla x_i se e solo se x_i è radice anche del polinomio derivato.* Calcoliamo allora le radici del polinomio derivato:

$$3x^2 - 8x + 2 = 0$$

Le radici sono:

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$$
$$x_2 = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$$

Si può verificare che nessuna delle due radici trovate è radice anche del polinomio caratteristico della matrice A, allora possiamo dire che tutti gli autovalori hanno molteplicità 1, e quindi sono regolari. Dunque la matrice è diagonalizzabile.

Un'altra modalità di procedere nella sua risoluzione è verificare se le due equazioni hanno qualche radice comune, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + 2x + 5 = 0 \\ 3x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases}$$

Se avessero delle radici comuni, potremmo combinare tra loro le uguaglianze sommando e sottrando tra loro i vari termini come ci farebbe comodo: arrivassimo ad un assurdo, si dimostrerebbe che non avrebbero soluzioni comuni (e quindi la matrice sarebbe diagonalizzabile). Ipotizzando quindi che abbiano una radice in comune, cominciamo a giocare, eliminando il termine di grado 3: moltiplichiamo la prima espressione per -3, la seconda espressione per x ($x \neq 0$ sicuramente), e sommiamo le due espressioni: otteniamo

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x + 2 = 0 \\ -4x^2 + 4x^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

A questo punto eliminiamo il termine di grado 2, moltiplichiamo la prima espressione per 4, la seconda per 3, e sommando la prima con la seconda. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -20x + 53 = 0 \\ -4x^2 + 4x^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

È abbastanza evidente che la radice $x = 53/20$ non è radice del polinomio di grado 2, quindi le premesse non erano corrette, e le due equazioni non hanno radici in comune. Anche per questa via siamo giunti a dire che la matrice è diagonalizzabile avendo tutti gli autovalori con molteplicità 1, regolari.

Esercizio 11 *Che cosa possiamo dire sugli autovalori e sulla diagonalizzazione della matrice A di ordine 2 che soddisfa la seguente equazione?*

$$A^2 - 4A + 3I = O$$

Per risolvere l'esercizio cerchiamo di dedurre gli autovalori oppure qualche informazione sulla matrice. L'eguaglianza può essere scritta anche cosí:

$$(A - 3I)(A - I) = O$$

Ricordiamo che quando il prodotto di due matrici produce la matrice nulla, possiamo dire che che uno dei due membri è la matrice nulla, oppure il determinante di uno dei due membri è pari a 0. I casi sono dunque:

1. $A = 3I$. In questo caso, A è una matrice scalare, diagonale per conseguenza.

2. $A = I$. Anche in questo caso A è una matrice scalare.

3. $|A-3I||A-I| = 0$. In questo caso, sappiamo che 1 oppure 3 è un autovalore di A. In entrambi i casi gli autovalori sono regolari, essendo A di ordine 2, per cui la matrice è diagonalizzabile. La diseguaglianza di Sylvester ci dice infatti che $\mathrm{r}(A-3I) + \mathrm{r}(A-I) \leq 2$; Il rango di $\mathrm{r}(A-3I)$ non può essere né 2 (il suo determinante è nullo) né 0 (non è la matrice O, caso già coperto nei due punti precedenti), e allora vale necessariamente 1. Stesso discorso per $\mathrm{r}(A-I)$. Questo significa che per una matrice di ordine 2, necessariamente vale l'eguaglianza $|A-3I| = 0$ e $|A-I| = 0$, e allora 1 e 3 sono gli autovalori di A, ed essendo regolari perché di molteplicità 1, la matrice è diagonalizzabile.

Teorema 28 *Tutte le matrici idempotenti sono diagonalizzabili.*

Dimostriamo il teorema per matrici idempotenti di ordine 2. Per definizione possiamo dire che

$$A^2 = A$$

Sviluppando l'espressione, possiamo scrivere

$$A^2 - A = O \;\Rightarrow\; A(A-I) = O$$

Abbiamo il caso, precedentemente analizzato, di un prodotto tra matrici di ordine 2 che dà la matrice nulla O. I casi sono dunque:

1. $A = O$. La matrice nulla è diagonalizzabile per forza. Ha 2 autovalori pari a 0.

2. $A = I$. La matrice scalare è diagonalizzabile per forza. Ha 2 autovalori pari a 1.

3. $|A||A-I| = 0$. gli autovalori di A sono 0 e 1. A è diagonalizzabile avendo gli autovalori regolari.

Da quanto sopra esposto, si vede che una matrice idempotente di ordine 2 ha per autovalori solamente 0 oppure 1 ma non altri.

Il fatto che una matrice idempotente abbia autovalori di 0 o 1, evidenziato sopra, vale in realtà per ogni matrice.

Se gli autovalori di una matrice sono tutti 0, necessariamente la matrice è nilpotente, ovvero $A^n = O$. Infatti se la matrice ha autovalori tutti nulli, il suo polinomio caratteristico è $\lambda^n = 0$. Ma per il teorema visto, A è una radice del suo polinomio caratteristico, allora possiamo dire che $A^n = O$, definizione di matrice nilpotente.

Esercizio 12 *La seguente matrice può essere idempotente?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Ricordando che una matrice idempotente ha la caratteristica di avere per autovalori una combinazione di 0 e 1 (la cui somma fa un numero compreso tra 0 e 3), e che la traccia della matrice è la somma del valore dei suoi autovalori, la traccia della matrice qui vale 15, valore non compreso tra 0 e 3. La matrice non è idempotente.

Esercizio 13 *La seguente matrice può essere idempotente?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1/2 & 6 \\ 7 & 8 & 1/3 \end{bmatrix}$$

La risposta è: no. Non può essere idempotente poiché la sua traccia non è un numero intero.

Esercizio 14 *La seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo dire che la matrice A è diagonalizzabile se lo è la matrice composta da 1. Si nota che il suo rango è 1, e il suo determinante è 0. Poiché il determinante è il prodotto di autovalori, allora esiste almeno un autovalore pari a 0. Quale molteplicità ha l'autovalore 0? Dalla disuguaglianza di Sylvester, sappiamo che

$$\mathrm{r}(\lambda I - A) + k \geq n$$

ovvero, per $\lambda = 0$, il nostro autovalore

$$1 + k \geq 3 \;\Rightarrow\; k \geq 2$$

Sicuramente la molteplicità non può essere 3, in quanto la traccia della matrice (coincidente a meno del segno con la somma degli autovalori) vale 3, per cui sappiamo che la molteplicità dell'autovalore 0 è 2 (e quindi è regolare), mentre l'altro autovalore (che quindi vale 3) è regolare perché di molteplicità 1: possiamo dire che la matrice A è diagonalizzabile avendo tutti gli autovalori regolari.

Esercizio 15 *La seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il discorso è analogo al precedente, ma in questo caso, essendo la traccia pari a 0, significa che gli autovalori sono tutti e 3 nulli, quindi non sono regolari.

Esercizio 16 *Se A è una matrice diagonalizzabile, che cosa possiamo dire della diagonalizzazione di un polinomio in A?*

Consideriamo la seconda potenza di A, A^2. Essendo A diagonalizzabile, $P^{-1}AP = D$. Allora $P{-}1A^2P = P{-}1AAP = P{-}1APP^{-1}AP = D^2$. Iterando il processo, si deduce che anche qualsiasi potenza di A è diagonalizzabile. Ovviamente, lo sono anche le loro combinazioni lineari, per cui tutti i polinomi in A sono diagonalizzabili.

Capitolo 4

Matrici ortogonali

Definizione 37 *Sia data la generica matrice $A = [a_{ik}]$. Si definisce con $\overline{A} = [\overline{a}_{ik}]$ la coniugata di A, costituita da tutti gli elementi di A coniugati.*

L'operatore di coniugazione gode delle seguenti proprietà:

- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$
- $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$
- $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$
- $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$
- $\overline{(A_T)} = \overline{(A)}_T$

Grazie all'operatore di coniugazione, possiamo definire la norma di un vettore.

Definizione 38 *Dato un vettore colonna $V = [v_j]$, possiamo definire la norma di V il seguente valore:*

$$\text{norma}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\overline{V_T}V}$$

La norma è un numero reale. Infatti possiamo anche esprimere cosí la norma:

$$\text{norma}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \overline{v_j}v_j}$$

ovvero $\sqrt{\overline{v_1}v_1 + \overline{v_2}v_2 + \ldots \overline{v_n}v_n}$: la norma di V è la radice quadrata della somma dei prodotti di ciascun elemento di V per il suo coniugato.

La norma è sempre ≥ 0, e diviene 0 solamente quando tutti i termini sono nulli.

Definizione 39 *Il vettore unitario, o* ***versore, è un vettore colonna la cui norma è 1.***

È abbastanza semplice verificare che qualunque vettore V diviso per la sua norma, è un versore.

Definizione 40 (Vettori ortogonali) *Due vettori V e W sono ortogonali quando*

$$\overline{W_T}V = 0$$

Per le proprietà dell'operatore di coniugazione e di trasposizione, è altresí evidente che

$$\overline{V_T}W = 0$$

Definizione 41 (Sistema ortonormale) *Un insieme di n vettori unitari (versori), mutuamente ortogonali a due a due, si dice un sistema ortonormale.*

Non lo dimostreremo, ma si può vedere che un sistema ortonormale non può essere composto da un numero di versori maggiore della dimensione del singolo versore componente.

Se n è la dimensione del versore, mettendo in una matrice (quadrata) tutti i versori di un sistema ortonormale, otteniamo una matrice N tale per cui

$$\overline{N_T}N = I$$

Un caso particolare di matrice di sistema ortonormale N, è quando tutti i suoi versori sono reali: in questo caso si parla si *sistema ortogonale* e la relativa matrice di versori è detta *matrice ortogonale*.

Definizione 42 (Matrice ortogonale) *Una matrice U si dice ortogonale quando soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *U è reale, ovvero tutti i suoi componenti sono reali;*
2. *$U_T U = I$*

Possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 29 *Una matrice reale (ovvero a elementi reali) è ortogonale se e solo se le sue colonne cosistuiscono un sistema ortonormale*

La dimostrazione è abbastanza semplice. Se la matrice reale è ortogonale, significa che $U_T U = I$. Essendo reale, $\overline{U} = U$, per cui $\overline{U_T}U = I$: questa relazione ci dice che le colonne di U sono una ortogonale all'altra per la definizione di ortogonalità, e quindi le sue colonne costituiscono un sistema ortonormale. Percorrendo questo ragionamento al contrario, dimostriamo la seconda parte del teorema, quindi il teorema è dimostrato.

Le matrici ortogonali hanno come determinante il valore 1 o -1, non possono avere altre possibilità. Infatti, applicando la definizione abbiamo che

$$\det(U_T U) = 1$$

Per il teorema di Binet:

$$\det(U_T U) = \det(U_T)\det(U)$$

ma poiché $\det(U_T) = \det(U)$, abbiamo

$$(\det(U))^2 = 1$$

I numeri il cui quadrato è 1 sono 1 e -1.

Definizione 43 (Matrice ortogonale propria) *Una matrice ortogonale si dice propria quando il suo determinante è 1.*

Definizione 44 (Matrice ortogonale impropria) *Una matrice ortogonale si dice impropria quando il suo determinante è -1.*

Un esempio di matrice ortogonale propria è la seguente:

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Un esempio di matrice ortogonale impropria è la seguente:

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Le matrici ortogonali hanno le seguenti caratteristiche:

1. il prodotto di matrici ortogonali è una matrice anch'essa ortogonale. Infatti, se U_1 e U_2 sono matrici ortogonali, possiamo dire che $(U_1U_2)_TU_1U_2 = (U_2)_T(U_1)_TU_1U_2 = (U_2)_TIU_2 = I$

2. l'inversa di una matrice ortogonale è anch'essa una matrice ortogonale. Infatti, se $U_TU = I$, moltiplicando alla destra per U^{-1} otteniamo $U_TUU^{-1} = IU^{-1}$, ovvero $U_T = U^{-1}$ la trasposta di U è la sua inversa.

3. anche le righe di una matrice ortogonale formano un sistema ortonormale. In virtú di quanto visto al punto precedente, possiamo infatti dire che se $U_T = U^{-1}$, allora $UU_T = I$, che scritta in un'altra maniera equivalente diviene $(U_T)_TU_T = I$, definizione di sistema ortogonale, questa volta sulla trasposta di U.

4.1 Matrici reali simmetriche

Ricordiamo che una matrice si dice simmetrica quando coincide con la sua trasposta: $A \equiv A_T$. Quando la matrice simmetrica è anche reale, possiamo allora dire che $A \equiv \overline{A_T}$ (Attenzione che non è vero il contrario, cioè non è vero che se $A \equiv \overline{A_T}$, allora A è reale e simmetrica)[1].

Si verifica che gli autovalori di una matrice reale simmetrica sono reali.

Teorema 30 (autovalori di una matrice reale e simmetrica) *Gli autovalori di una matrice reale e simmetrica sono reali.*

Sia A la matrice reale e simmetrica, ovvero

$$\begin{cases} A_T = A \\ \overline{A} = A \end{cases}$$

Se λ è un autovalore e X è il suo autovettore, sappiamo per definizione che $\lambda X = AX$. Applicando l'operatore di coniugazione e trasposizione, abbiamo che $\overline{(\lambda X)}_T = \overline{(AX)}_T$. Possiamo dire che $\overline{(AX)}_T = \overline{X}_T\overline{A}_T$. Per ipotesi, la matrice

[1] Le matrici per cui vale $A \equiv \overline{A_T}$ si dicono *matrici hermitiane*.

è reale e simmetrica, per cui $A = \overline{A}_T$, da cui $\overline{(AX)}_T = \overline{X}_T A$. Dunque siamo arrivati a dire che $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T = \overline{X}_T A$. Moltiplicando entrambi i membri sulla destra per X, e lo possiamo fare poich sono conformi per la moltiplicazione, abbiamo che $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T X = \overline{X}_T AX$. Ma $AX =$ da cui $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T X = \overline{X}_T \lambda X = \lambda \overline{X}_T X$ ovvero $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T X = \lambda \overline{X}_T X$. Il termine $\overline{X}_T X$ è un numero, necessariamente non 0 per definizione di autovettore. Per cui dividendo entrambi i membri per tale numero, abbiamo che $\overline{\lambda} = \lambda$. Abbiamo dunque verificato che ogni autovettore di una matrice reale e simmetrica è uguale al suo coniugato, per cui λ è necessariamente reale.

Si verifica che gli autovettori di una matrice reale simmetrica sono ortogonali.

Teorema 31 (autovettori di matrice reale e simmetrica) *Sia A una matrice reale e simmetrica, siano λ e μ due autovalori di A distinti ($\lambda \neq \mu$), e siano X e Y i relativi autovettori associati. Si dimostra che X e Y sono ortogonali, ovvero*

$$\overline{X}_T Y = \overline{Y}_T X = 0$$

Dalla definizione di autovalori e autovettori sappiamo che $\lambda X = AX$ e $\mu Y = AY$. Applicando l'operatore di coniugazione, arriviamo come in precedenza a dire che $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T = \overline{X}_T A$. A questo punto moltiplichiamo entrambi i membri alla destra per Y, e otteniamo $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T Y = \overline{X}_T AY$ da cui $\overline{\lambda}\,\overline{X}_T Y = \overline{X}_T \mu Y$ ed essendo $\overline{\lambda} = \lambda$ per quanto visto nel teorema 30 possiamo scrivere $\lambda \overline{X}_T Y = \mu \overline{X}_T Y$ ovvero $(\lambda - \mu)\overline{X}_T Y = 0$. Essendo per ipotesi $\lambda \neq \mu$, abbiamo che necessariamente $\overline{X}_T Y = 0$. Siamo giunti alla tesi.

Siamo adesso pronti per enunciare un importante teorema.

Teorema 32 (Teorema fondamentale delle matrici reali simmetriche) *Ogni matrice reale e simmetrica A è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice ortogonale U tale per cui A è simile ad una matrice diagonale:*

$$\begin{cases} A_T = A \\ \overline{A} = A \end{cases} \Rightarrow \exists U : U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

Va da sé che la matrice diagonale ha tutti gli elementi reali. Per trovare la matrice è sufficiente trovare gli autovettori, normalizzarli, ovvero dividerli per la loro norma, e metterli in fila in una tabella.

Esercizio 17 *Trovare la matrice ortogonale che rende simile ad una matrice diagonale la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 3\lambda - 2$ in cui si nota che una soluzione è $\lambda = -1$. Scomponendo il polinomio troviamo che gli altri due autovalori sono ancora -1 e 2. Troviamo dunque gli autovettori risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ -z + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

sostituendo a λ gli autovalori.

Per $\lambda = 2$ troviamo che il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow X_1 = h \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per $\lambda = -1$ troviamo che il sistema da risolvere è:

$$\{ -x + y - z = 0 \Rightarrow \{ x = y - z \Rightarrow X_2, X_3 = p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto che la matrice degli autovettori deve essere fatta cosí:

$$P = \begin{bmatrix} h & p-k & p'-k' \\ -h & p & p' \\ h & k & k' \end{bmatrix}$$

Dobbiamo allora imporre l'ortogonalità tra la seconda e la terza colonna, mentre tra la prima colonna e le altre due l'ortogonalità è garantita dal teorema 31:

$$(p - k)(p' - k') + pp' + kk' = 0$$

Tra tutte le soluzioni possibili, mi basta ovviamente trovarne una sola. Per esempio, se imponessimo $p = 0$ otterremmo $-kp' + kk' + kk' = 0$ da cui $k(-p' + 2k') = 0$; con $k \neq 0$ (altrimenti la seconda colonna sarebbe tutta nulla) abbiamo che $p' = 2k'$. La matrice degli autovettori risulta quindi

$$P = \begin{bmatrix} h & -k & k' \\ -h & 0 & 2k' \\ h & k & k' \end{bmatrix}$$

Divido adesso ogni colonna per la sua norma, rispettivamente

$$n_1 = h\sqrt{3}$$
$$n_2 = k\sqrt{2}$$
$$n_3 = k'\sqrt{6}$$

e otteniamo quindi la seguente matrice ortogonale

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Capitolo 5

Trasformazioni lineari

Supponiamo di avere due n-ple di variabili complesse:

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$
$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

Si dice che esiste una trasformazione lineare dalle y_i alle x_i quando si definisce un insieme di n^2 variabili b_{ik} tale per cui

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

Indicando con X il vettore colonna delle variabili x_i, con Y il vettore colonna delle variabili y_i e con B la matrice dei coefficienti b_{ik}, il sistema può essere espresso nella seguente maniera:

$$X = BY$$

Definizione 45 (Trasformazione lineare degenere) *Una trasformazione lineare $X = BY$ si dice degenere quando la matrice dei coefficienti B ha determinante nullo.*

Quando la trasformazione lineare non è degenere, possiamo invertire la matrice dei coefficienti, ottenendo le variabili Y a partire dalle X:

$$Y = B^{-1}X$$

Se B fosse una matrice ortogonale (e quindi a coefficienti reali), si avrebbe una *trasformazione ortogonale*: $X = UY$. In questo caso, essendo la matrice inversa pari alla trasposta, avremmo che $Y = U_T X$.

5.1 Forme quadratiche

In algebra, con il termine “forma”, si indica un polinomio omogeneo di qualsiasi grado m, con $m \geq 1$. Le *forme quadratiche* sono dei polinomi omogenei di secondo grado.

Un esempio di forma quadratica nelle variabili x, y e z è il seguente

$$\phi(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$$

Una forma quadratica è sempre rappresentabile attraverso l'uso di una matrice simmetrica. Indicando infatti con X il vettore colonna delle variabili, e con A la *matrice simmetrica* dei coefficienti, possiamo indicare cosí la forma quadratica:

$$\phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = X_T AX$$

Per esempio, la nostra forma quadratica in 3 variabili di prima è rappresentabile cosí:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sviluppando il prodotto, abbiamo il seguente polinomio:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Si noti che la coppia di indici del coefficiente indica quali variabili sono insieme con quel coefficiente. Es: a_{23} riunisce le variabili x_2 e x_3.

In generale, qualsiasi matrice simmetrica S può essere usata come matrice dei coefficienti di una forma quadratica, facendo il prodotto $X_T SX$.

5.2 Trasformazioni lineari invertibili

Uno dei problemi sulle forme quadratiche che sono stati affrontati nel passato, è stato quello di semplificarne il polinomio mediante un cambio di variabili.

Per esempio, dalla seguente forma quadratica

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy - 3z^2 + xz$$

sostituendo $x + y = t$, si ottiene:

$$\phi(x, z, t) = t^2 - 3z^2 + xz$$

Se la trasformazione lineare fatta sui coefficienti è invertibile, la forma quadratica non viene in alcun modo alterata. Vedremo che la trasformazione lineare invertibile ha un significato fisico: rappresenta una rotazione del sistema cartesiano di riferimento.

Come cambiano i coefficienti di una forma quadratica se si esegue una trasformazione lineare invertibile? In generale si vede che ottenuamo ancora un polinomio dello stesso grado omogeneo.

$$\begin{cases} \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X_T AX \\ X = BY \end{cases} \Rightarrow X_T AX = (BY)_T A(BY) = Y_T(B_T AB)Y$$

Si vede facilmente che se A è simmetrica, lo è anche $(B_T AB)$, per cui otteniamo una nuova forma quadratica da una trasformazione lineare invertibile. Siamo inoltre certi che $(B_T AB) \neq O$, perché B è invertibile, e la matrice A non è a coefficienti nulli.

Definizione 46 (Forma canonica) *Una forma quadratica è in forma canonica quando può essere espressa nella seguente maniera:*

$$X_T \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) X = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots \alpha_n x_n^2$$

Ci domandiamo: esiste una trasformazione lineare invertibile che riduca una arbitraria forma quadratica in una forma canonica? La risposta è sí.

Abbiamo infatti visto che una matrice A reale e simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice ortogonale U tale per cui $U_T AU = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Applicando allora la traformazione lineare $X = UY$ ai coefficienti, si ottiene una forma canonica, in cui i coefficienti sono gli autovalori di A.

$$(UY)_T A(UY) = Y_T (U_T AU)Y = Y_T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)Y$$

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema.

Teorema 33 *Ogni forma quadratica a coefficienti reali può essere ridotta alla sua forma canonica mediante una opportuna trasformazione lineare invertibile*[1]*.*

Esercizio 18 *Trovare la matrice che porta la seguente forma quadratica alla sua forma canonica:*

$$\phi(x, y, z) = 2xy - 4xz - 4yz$$

Ricaviamo dapprima la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi calcoliamo gli autovalori

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Risulta l'espressione $(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 8)$ da cui ricaviamo che gli autovalori sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = (1 + \sqrt{33})/2 \\ \lambda_3 = (1 - \sqrt{33})/2 \end{cases}$$

A questo punto dobbiamo trovare 3 autovettori versori linearmente indipendenti. Dobbiamo risolvere tre sistemi distinti, sostituendo a λ di volta in volta un autovalore, prendiamo gli autovettori e li normalizziamo. Lasciamo al lettore la conclusione dell'esercizio. Si nota comunque che una possibile forma canonica è:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + (1 + \sqrt{33})x_2^2/2 + (1 - \sqrt{33})x_3^2/2$$

Esercizio 19 *Trovae la trasformazione lineare per ridurre in forma canonica la seguente forma quadratica:*

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy$$

[1] In generale, anche le matrici a coefficienti complessi sono passibili di forma canonica, ma qui ci occuperemo solo di quelle a coefficienti reali.

Per risolvere l'esercizio, notiamo che la forma quadratica può essere anche scritta cosí:

$$\phi(x, y, z) = (x + y)^2 - 2z^2$$

In un certo senso è già in una forma canonica. Con le sostituzioni $x' = x + y$ e $z' = z$, otteniamo una forma canonica. Ma noi vogliamo arrivare alla forma attraverso una trasformazione ortogonale lineare, e al momento non sappiamo il valore da dare a y'. Osserviamo allora la matrice dei coefficienti che abbiamo fino a questo momento:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso utilizziamo le proprietà che conosciamo, ovvero che la matrice dei coefficienti deve essere simmetrica, e che anche a livello di righe abbiamo dei versori. Quello che possiamo fare allora è normalizzare la prima riga, ottenendo:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi rendiamo simmetrica la matrice, ottenendo

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'ultimo elemento viene ricavato imponendo che a livello di riga (o colonna) si abbia un versore (ovvero un vettore a norma 1). Per il segno, deve essere negativo in quanto il determinante deve essere pari a 1 o -1. Otteniamo la seguente matrice di trasformazione:

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 20 *Data la matrice A quadrata, ipotizziamo che A^2 sia ortogonale e che altrettanto sia A^3. Possiamo concludere che anche A lo sia?*

Per risolvere l'esercizio, ricordiamo alcune proprietà delle matrici ortogonali:

- se A è ortogonale, anche l'inversa A^{-1} è ortogonale;
- il prodotto di due matrici ortogonali è a sua volta una matrice ortogonale.

Con le proprietà ricordate sopra, possiamo dire che se A^2 è ortogonale, allora anche $(A^2)^{-1} = A^{-2}$ lo è, e quindi, moltiplicando due matrici ortogonali come A^{-2} e A^3, otteniamo A, ortogonale. C'erano sicuramente altre maniere per risolvere l'esercizio.

Esercizio 21 *Trovare tutte le matrici ortogonali (e quindi a coefficienti reali!) di grado 2.*

La matrice sappiamo che è simmetrica:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Imponendo che le colonne siano versori (norma = 1) e che siano normali (somma di prodotti pari a 0) otteniamo il seguente sistema da risolvere:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ b^2+c^2=1 \\ ab+bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ b^2+c^2=1 \\ b(a+c)=0 \end{cases}$$

Guardando la terza eguaglianza, vediamo che abbiamo solamente due possibilità: $b=0$ oppure $a+c=0$. Le soluzioni diventano quindi le seguenti 4 matrici

$$\begin{cases} a^2=1 \\ c^2=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

piú le seguenti infinite matrici

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a=-c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Esercizio 22 *Verificare che nessuna matrice reale e simmetrica è tale per cui* $A^2+I=O$

Se la matrice è reale e simmetrica, $A=A_T$. Se $A^2+I=O$, allora $A^2=-I$. Ma $A^2=AA=AA_T$. Ma $AA_T \neq -I$, in quanto gli elementi sulla diagonale principale sono necessariamente dei quadrati di numeri reali, non possono avere valore negativo.

Esercizio 23 *Determinare se la seguente matrice è diagonalizzabile.*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Il determinante è sicuramente nullo, quindi almento un autovalore è pari a 0. Stabiliamo se è un autovalore regolare. La relazione generale che sappiamo sussistere è $\mathrm{r}(\lambda_j I - A) + k(\lambda_j) \geq n$ che nel nostro caso diviene $\mathrm{r}(-A)+k(0) \geq 3$. Il rango di A è evidentemente 1, e allora la relazione si trasforma in $k(0) \geq 2$: la molteplicità dell'autovalore 0 almeno 2. Poiché la traccia vale 6, non tutti gli autovalori sono nulli, l'ultimo è certamente 6, per cui l'autovalore 2 è regolare (e 6 lo è per la sua unicità). La matrice è dunque diagonalizzabile avendo tutti gli autovalori regolari.

Il ragionamento fatto sopra può essere iterato per tutte le matrici quadrate di ordine n con le righe tutte uguali: se la traccia non è nulla, allora la matrice ha $n-1$ autovalori 0 regolari, e uno il cui valore è la traccia.

Esercizio 24 *Dati gli autovettori*

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Z=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

associati rispettivamente agli autovalori 0, 1 e 2, calcolare la relativa matrice A, e stabilire se è reale e simmetrica.

Dapprima notiamo subito che la matrice non può essere reale e simmetrica, in quanto Y e Z non sono ortogonali. Poiché gli autovalori, essendo com molteplicità 1, sono regolari, la matrice A è diagonalizzabile. Possiamo allora dire che, data $P = [XYZ]$, di vede che P è sicuramente invertibile, e quindi:

$$A = P\,\mathrm{diag}(0, 1, 2)P^{-1}$$

Esercizio 25 *Sia A una matrice quadrata di ordine n, e sia $f(\lambda)$ il seguente polinomio di grado t:*

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots = \prod_{j=1}^{t}(\lambda - \lambda_j)$$

con $t \leq n$, di radici reali e distinte, e tale per cui $f(A) = O$. Inoltre, non esiste alcun polinomio di grado inferiore a t che ammetta A come radice. Dimostrare che

1. *$\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots t$ sono gli autovalori di A;*
2. *A è diagonalizzabile.*

Lasciamo che il lettore risolva da sé l'esercizio. Si suggerisce di partire da $t = 2$.

Appendice A

Testo della licenza "Creative Commons"

A.1 Sunto della licenza: Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo ver. 2,5 Italia

Tu sei libero:

- di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera;
- di modificare quest'opera,

alle seguenti condizioni:

- *Attribuzione.* Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza;
- *Non commerciale.* Non puoi usare quest'opera per fini commerciali;
- *Condividi allo stesso modo.* Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica a questa.

Ogni volta che usi o distribuisci quest'opera, devi farlo secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.

In ogni caso, puoi concordare col titolare dei diritti d'autore utilizzi di quest'opera non consentiti da questa licenza.